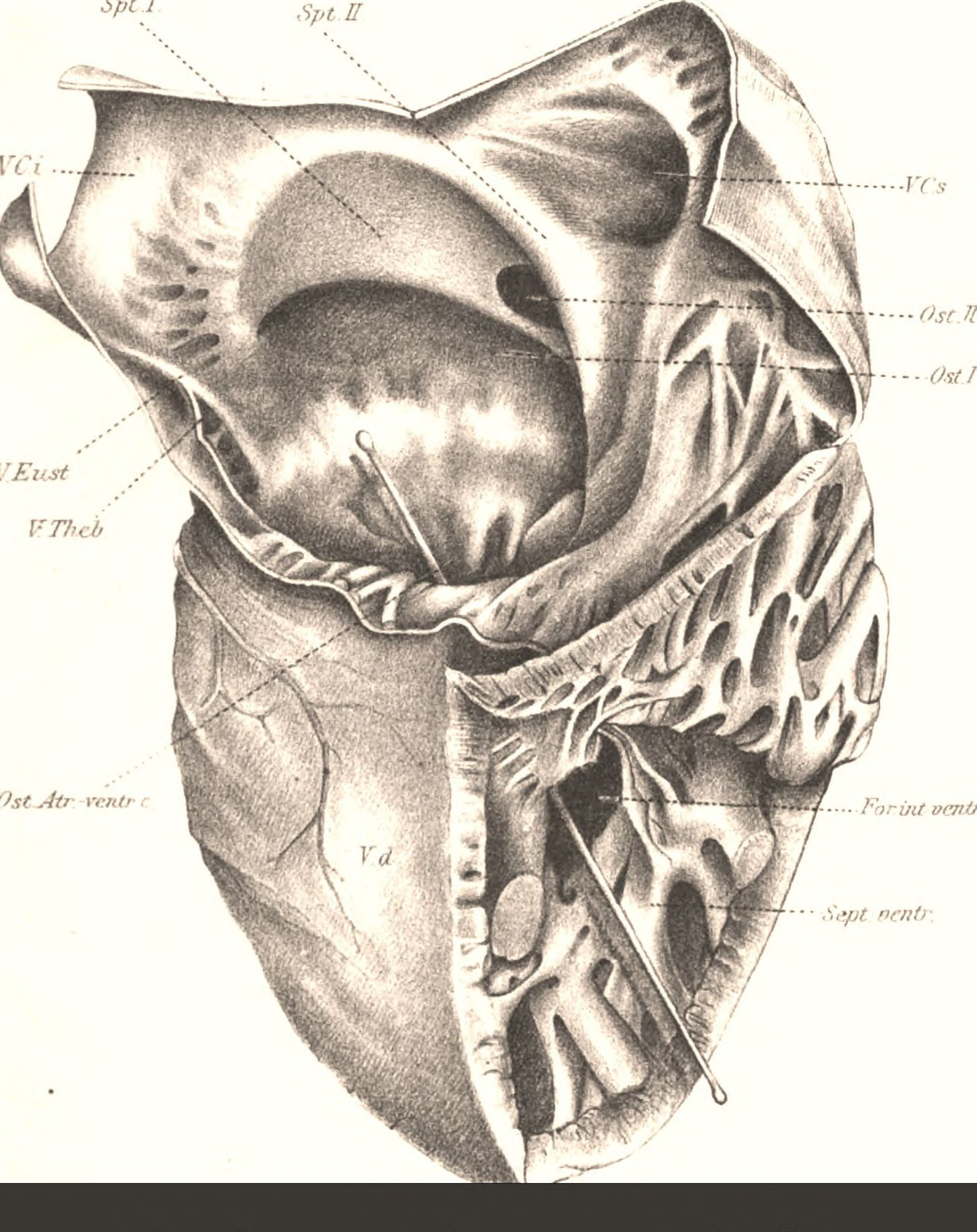
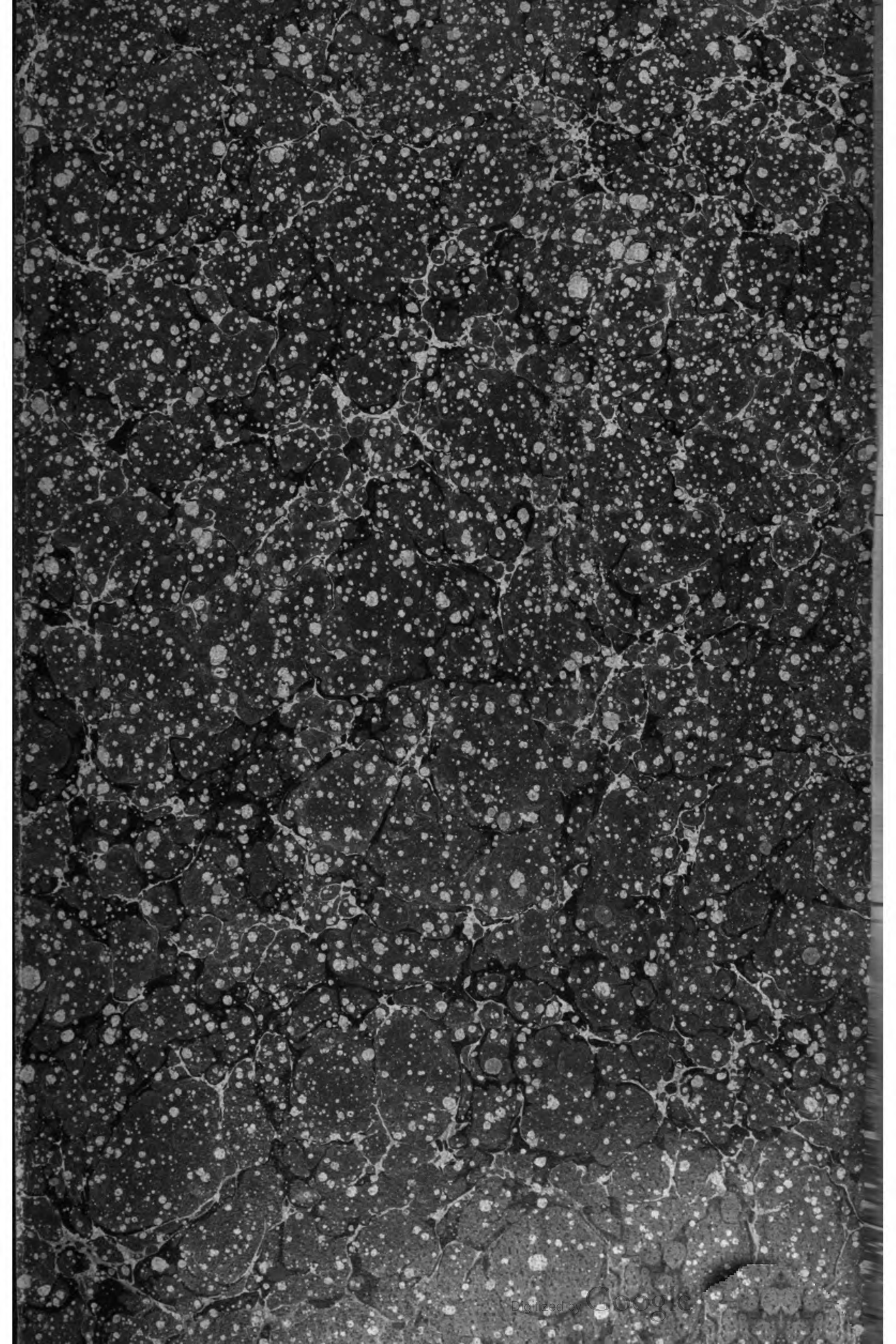


Zur kenntnis aromatischer ketone und [alpha]-oxysaüer ...

August Stocker, Ernst Schrömbgens, Friedrich von Meyenburg, Gustav Adolf Feodor Wilhelm Mie, ...





ÜBER
ALGEBRAISCH-LOGARITHMISCHE INTEGRALE
VON SYSTEMEN
ALGEBRAISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

NATURWISSENSCHAFTLICH-MATHEMATISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT HEIDELBERG

VON

Christian MAX Ernst MÜLLER,

AUS STARGARD IN MECKLENBURG-STRELITZ.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1892.

SEINEM LEHRER

HERRN GEH. RAT

PROF. DR. L. KOENIGSBERGER

IN VEREHRUNG UND DANKBARKEIT

GEWIDMET.

Über algebraisch-logarithmische Integrale von Systemen algebraischer Differentialgleichungen.*)

Einleitung.

Bedeutet z eine durch eine algebraische Gleichung

(a) $$f(x, z) = 0$$

definierte, algebraische Funktion der unabhängigen Variabelen x, so kann man stets durch Differentiation eine Differentialgleichung von der Form herleiten

(b) $$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + Y_2 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y,$$

worin $Y_1, Y_2, \ldots Y_m, y$ irreduktible algebraische Funktionen von x bedeuten, welcher jene algebraische Funktion z als Integral genügt. Dasselbe gilt auch für den Ausdruck

(c) $$z = A \log v \text{ **)}$$

oder die Summe von solchen Logarithmen

(d) $$z = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

worin die A-Grössen vorläufig Constanten und die v-Grössen algebraische Funktionen von x sind.

Anders die umgekehrte Frage. Da schon die einfachsten Beispiele lehren, dass eine Differentialgleichung der obigen Form nicht immer ein algebraisches oder logarithmisches Integral besitzt, so entsteht die Frage: Wann hat eine solche Differentialgleichung ein *algebraisches* oder ein *logarithmisches*

*) Zwischen der Einreichung der Arbeit an die Fakultät (Ende Juli 1890) und dem Druck derselben sind infolge verschiedener Umstände über anderthalb Jahre verflossen.

**) In diesem Falle muss $Y_m = 0$ sein.

Integral, und welche *Formen* müssen dann die Integrale besitzen?

So allgemein konnte die Frage bis jetzt nicht gelöst werden, und man fing daher an, die Frage unter gewissen für die Differentialgleichung gemachten Voraussetzungen anzugreifen. Es handelte sich jetzt darum, passende Annahmen machen, um noch möglichst allgemeine Resultate zu erhalten.

Indem er die Differentialgleichung gleichsam in zwei Teile teilte und über die gleich Null gesetzte linke Seite der Differentialgleichung, d. h. über die zugehörige reducierte Differentialgleichung einerseits, und andererseits über die algebraische Funktion y auf der rechten Seite Voraussetzungen machte, konnte Herr *Prof. Koenigsberger* eine Reihe sehr wichtiger Sätze herleiten, die er in seinem Buche „*Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen*“ Leipzig 1882, ferner in zwei Abhandlungen im *Crelle'schen Journal Bd. 94* und *Bd. 99* und endlich in seinem neuesten Werke „*Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen*“ Leipzig 1889 bekannt machte.

Die beiden dort eingeführten *Bedingungen* sind:

1. *Die zugehörige reducierte Differentialgleichung habe kein Integral der gerade betrachteten Art, also kein algebraisches resp. kein logarithmisches Integral.*

2. *Die algebraische Funktion y auf der rechten Seite der Differentialgleichung, welche wir durch eine algebraische, mit Adjungierung von $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ irreduktible Gleichung definiert denken wollen*

$$(e)\ \Phi(y) = y^\lambda + \varphi_1(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m)\, y^{\lambda-1} + \varphi_2(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m)\, y^{\lambda-2} + \cdots + \varphi_\lambda(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m) = 0,$$

und zu deren sämtlichen Werten wir daher durch geschlossene Umläufe der unabhängigen Variabelen x gelangen können, habe die Eigenschaft, dass sie bei einem geschlossenen Umlauf des x, für welchen die Funktionen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert bleiben, in ein Multiplum ihres ursprünglichen Wertes übergehe — oder anders ausgedrückt, dass zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 der Gleichung

$$\Phi(y) = 0$$

die Relation

(f) $$\frac{y_1}{y_2} = r$$

besteht, wo r eine rationale Funktion von $x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ *bedeutet.* Dann muss, wie Herr *Prof. Koenigsberger**) gezeigt hat, r eine Constante und zwar eine μ^{te} Einheitswurzel sein und die obige Definitionsgleichung (e) die Form haben

(g) $$y^{\delta\mu} + \Omega_1(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) x^{(\delta-1)\mu} + \Omega_2(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) y^{(\delta-2)\mu} + \cdots + \Omega_\delta(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) = 0,$$

oder wenn

(h) $$y^\mu = Y$$

gesetzt wird,

(i) $$Y^\delta + \Omega_1(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) Y^{\delta-1} + \Omega_2(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) Y^{\delta-2} + \cdots + \Omega_\delta(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) = 0.$$

D. h. die ursprüngliche Definitionsgleichung lässt sich darstellen als eine algebraische Gleichung niederen Grades, deren Variabele eine Potenz der ursprünglichen Variabelen ist.

Die eben gedachte Voraussetzung ist z. B. mit noch weiterer Spezialisierung bei allen binomischen Gleichungen erfüllt, ist also erfüllt, wenn die rechte Seite der Differentialgleichung eine reine Irrationalität ist.

Unter diesen Voraussetzungen wird nun — und das ist kurz das leitende Prinzip in der Untersuchung — ein Integral der oben bezeichneten Art, also ein algebraisches oder logarithmisches Integral angenommen, und aus der hypothetischen Existenz eines solchen Integrals werden dann Folgerungen gezogen, die sowohl Existenzbedingungen als auch formale Bestimmungen der Integralfunktion abgeben.

Bei der Frage nach der Existenz eines Integrals von der Form

(k) $$z = \sum_1^\varrho A_i \log v_i = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho$$

ergaben sich merkwürdige Relationen zwischen der Anzahl ϱ

*) *Koenigsberger*, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen S. 192, 206. Crelle's Journal Bd. 94 S. 291.

der im Integral enthaltenen Logarithmen und der Grösse μ, welche in dem Grade der die rechte Seite definierenden algebraischen Gleichung vorkommt.

Diese Untersuchungen sollen in der vorliegenden Arbeit auf gewisse Differentialgleichungssysteme übertragen und für einige weitere Fälle durchgeführt werden, um (wenn möglich) die hierbei stattfindende Gesetzmässigkeit zu erkennen. Im Anschluss daran sollen dann noch einige Fälle behandelt werden, in denen die Coefficienten der Logarithmen des Integrals nicht mehr der Beschränkung unterliegen, Constanten zu sein, sondern algebraische Funktionen bedeuten. Es wird sich zeigen, welche Formen dann die Coefficienten sowie die Logarithmanden besitzen müssen.

Die ganze Untersuchung beruht im wesentlichen auf zwei Sätzen, von denen der erste, welcher für die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen von grundlegender Bedeutung ist, von *Abel* herrührt, während der zweite höchst merkwürdige Satz mit Hülfe des soeben erwähnten *Abel*'schen Satzes von Herrn *Prof. Koenigsberger* gefunden wurde. Beide Sätze mögen wegen ihrer Bedeutung für das Folgende hier kurz angeführt werden.

Der *Abel*'sche Satz:*)

Für jede beliebige Reihe von algebraischen Funktionen, definiert durch irreduktible algebraische Gleichungen, giebt es stets eine andre algebraische Funktion t, durch welche sich jene ersten algebraischen Funktionen mit Hülfe rationaler Funktionen der Coefficienten ihrer Definitionsgleichungen rational ausdrücken lassen; die algebraische Funktion t ist definiert durch eine irreduktible algebraische Gleichung, deren Coefficienten sich rational aus denen jener ersten algebraischen Gleichungen zusammensetzen. (Vgl. den Satz über gleichverzweigte Funktionen in der Funktionentheorie.)**)

Der *Koenigsberger*'sche Satz:

---

*) *Abel*, Oeuvres complètes, nouvelle édition, tome premier page 546.

**) *Koenigsberger*, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen S. 181, Anmerkung.

Bedeutet y eine algebraische Funktion der unabhängigen Variabelen x, definiert durch die algebraische Gleichung

$$y^m + f_1(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, x)\, y^{m-1} + f_2(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, x)\, y^{m-2} + \cdots + f_m(Y_1, Y_2, \ldots Y_n, x) = 0,$$

*welche mit Adjungierung der irreduktiblen algebraischen Funktionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ selbst irreduktibel ist, so kann man durch solche geschlossenen Umläufe des x zu allen Werten der Funktion y gelangen, welche die Coefficienten nicht ändern *).*

Algebraische Integrale.

Es sei das lineare, nicht homogene Differentialgleichungssystem

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = Y_{11} z_1 + Y_{12} z_2 + \cdots + Y_{1n} z_n + y_1 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = Y_{21} z_1 + Y_{22} z_2 + \cdots + Y_{2n} z_n + y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = Y_{n1} z_1 + Y_{n2} z_2 + \cdots + Y_{nn} z_n + y_n \end{cases}$$

vorgelegt, worin x die unabhängige Variabele und $z_1, z_2, \ldots z_n$ die abhängigen Variabelen sind. Die Grössen $Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{nn}, y_1, y_2, \ldots y_n$ bedeuten algebraische, und wie wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, irreduktible Funktionen von x. Es besitze (1) ein Integralsystem, von welchem ein Element z_1 eine algebraische Funktion ist, welche wir als die Lösung einer algebraischen, mit Adjungierung der Coefficienten von (1) irreduktiblen Gleichung

$$(2)\qquad z_1^{\lambda} + \omega_1(x_1 Y_{11}, \ldots Y_{nn}, y_1 \ldots y_n)\, z_1^{\lambda-1} + \cdots + \omega_\lambda(x_1 Y_{11}, \ldots Y_{nn}, y_1, \ldots y_n) = 0$$

betrachten.

*) *Koenigsberger*, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen S. 180 u. 181.



Bilden wir nun aus (2) die $(n-1)$ ersten Ableitungen der Funktion z_1, so ergeben sich für

$$\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \dots \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}}$$

Ausdrücke von der Form

$$(3) \qquad \psi_1 z_1^{\lambda-1} + \psi_2 z_1^{\lambda-2} + \cdots + \psi_\lambda ,$$

worin die ψ-Grössen rationale Funktionen von x, $Y_{11}, \dots Y_{nn}$, $y_1, \dots y_n$ sind.

Differentiieren wir die erste Gleichung des Systems (1) $(n-1)$ mal nach einander, und ersetzen wir jedesmal die höheren Ableitungen von z_1 durch ihre Ausdrücke von der Form (3) und ebenso die ersten Differentialquotienten von $z_2, z_3, \dots z_n$ durch ihre Werte, wie sie in den $(n-1)$ übrigen Gleichungen des Systems (1) angegeben sind, so ergiebt sich als Resultat der Rechnung

$$(4)\begin{cases} \varphi_1^{(1)} z_1^{\lambda-1} + \varphi_2^{(1)} z_1^{\lambda-2} + \cdots + \varphi_\lambda^{(1)} = X_2^{(1)} z_2 + X_3^{(1)} z_3 + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + X_n^{(1)} z_n \\ \varphi_1^{(2)} z_1^{\lambda-1} + \varphi_2^{(2)} z_1^{\lambda-2} + \cdots + \varphi_\lambda^{(2)} = X_2^{(2)} z_2 + X_3^{(2)} z_3 + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + X_n^{(2)} z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_1^{(n-1)} z_1^{\lambda-1} + \varphi_2^{(n-1)} z_1^{\lambda-2} + \cdots + \varphi_\lambda^{(n-1)} = X_2^{(n-1)} z_2 \\ \qquad\qquad + X_3^{(n-1)} z_3 + \cdots + X_n^{(n-1)} z_n , \end{cases}$$

worin die φ- und X-Grössen sich rational aus den Coefficienten des Systems (1) zusammensetzen, also rationale Funktionen von x, $Y_{11}, \dots Y_{nn}$, $y_1, \dots y_n$ sind. Fassen wir (4) als ein simultanes System algebraischer Gleichungen auf, welches in den als die Unbekannten betrachteten $(n-1)$ Grössen $z_2, z_3, \dots z_n$ linear ist, so können wir im allgemeinen z_2, $z_3, \dots z_n$ aus (4) berechnen, und zwar ergeben sich dieselben als rationale Funktionen von z_1, in welche die φ- und X-Grössen, d. h. rationale Funktionen von x und den Coefficienten in (1) eintreten.

Ist also ein Element z_1 eines Integralsystems eine algebraische Funktion, so lassen sich im allgemeinen die ergänzenden Elemente des simultanen Integralsystems rational durch eben

*diese Funktion ausdrücken, sind also im allgemeinen auch algebraische Funktionen**).

Seien nun

$$z_1, z_2, \dots z_n$$

die n Elemente eines algebraischen, simultanen Integralsystems des Systems (1), definiert durch n algebraische Gleichungen, die mit Adjungierung der Coefficienten des Systems (1) irreduktibel sind. Nach dem *Abel*'schen Satze**) lassen sich diese algebraischen Funktionen mit Hülfe rationaler Funktionen der Coefficienten ihrer Definitionsgleichungen rational durch eine andre algebraische Funktion t_1 ausdrücken, welch' letztere selbst Lösung einer irreduktiblen algebraischen Gleichung ist, deren Coefficienten sich rational aus x, $Y_{11}, \dots Y_{nn}$, $y_1, \dots y_n$ zusammensetzen

$$(5) \qquad \begin{cases} z_1 = \mathfrak{a}_1(t_1) \\ z_2 = \mathfrak{a}_2(t_1) \\ \dots\dots\dots \\ z_n = \mathfrak{a}_n(t_1). \end{cases}$$

Lassen wir jetzt die unabhängige Variabele x solche geschlossenen Umläufe machen, dass die t_1-Funktion in ihre sämtlichen Werte übergeht, während die Coefficienten $Y_{11}, \dots Y_{nn}$, $y_1, \dots y_n$ ungeändert bleiben***), so werden die aus (5) folgenden Zusammenstellungen wieder simultane Integralsysteme für (1) sein. Sei eine solche Zusammenstellung

$$z_1', z_2' \dots z_n',$$

so folgt für die erste der Gleichungen (1)

$$\frac{dz_1'}{dx} = Y_{11} z_1' + Y_{12} z_2' + \cdots + Y_{1n} z_n' + y_1$$

$$\frac{dz_1}{dx} = Y_{11} z_1 + Y_{12} z_2 + \cdots + Y_{1n} z_n + y_1$$

$$\frac{d(z_1' - z_1)}{dx} = Y_{11}(z_1' - z_1) + Y_{12}(z_2' - z_2) + \cdots + Y_{1n}(z_n' - z_n).$$

*) *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 178 ff.

**) S. S. 4.

***) Vgl. den Koenigsberger'schen Satz S. 4.

Bilden wir die entsprechenden anderen Gleichungen, so erhalten wir das zu (1) zugehörige reducierte Differentialgleichungssystem, für welches

$$z_1' - z_1, \quad z_2' - z_2, \ldots z_n' - z_n$$

ein simultanes Integralsystem bilden.

Machen wir nun die oben S. 2 erwähnte Annahme, dass das reducierte System überhaupt keine algebraischen Integrale, oder nur solche Integrale besitzt, die sich rational aus x, $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ zusammensetzen, so kann in beiden Fällen leicht erkannt werden, *dass* $z_1, z_2, \ldots z_n$ *rationale Funktionen von* x *und den Coefficienten des Systems* (1) *sein müssen.* Denn im ersten Falle müsste $z_1' - z_1 = 0$, also $z_1' = z_1$ sein, d. h. z_1 ändert sich für alle x-Umläufe nicht, die t_1 in seine verschiedenen Werte überführen, muss also rational in den Coefficienten der t_1-Gleichung, d. h. weiter rational in x, $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$, $y_1, \ldots y_n$ sein. Im zweiten Falle wäre

$$z_1' = z_1 + r(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}),$$

wo r eine rationale Funktion bedeutet. Aus (2) folgt dann

$$\begin{array}{r} z_1^\lambda + \omega_1 z_1^{\lambda-1} + \cdots + \omega_\lambda = 0 \\ (z_1 + r)^\lambda + \omega_1 (z_1 + r)^{\lambda-1} + \cdots + \omega_\lambda = 0 \\ \hline \psi_1 z_1^{\lambda-1} + \cdots + \psi_\lambda = 0, \end{array}$$

d. h. z_1 genügt einer algebraischen Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades, während doch die irreduktible Definitionsgleichung für z_1 vom λ^{ten} Grade war.

Unter der gemachten Annahme muss also z_1 eine rationale Funktion sein. Dasselbe gilt dann auch für $z_2, \ldots z_n$ (vgl. S. 6).

Nachdem wir den *Charakter* der Integralfunktion z_1 kennen gelernt haben, wollen wir jetzt ihre *Form* zu bestimmen suchen.

Es sei y eine algebraische Funktion von x, definiert durch eine mit Adjungierung von $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ irreduktible binomische Gleichung

$$y^n = f(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}), \tag{6}$$

deren sämtliche Lösungen

$$y, \quad \varepsilon y, \quad \varepsilon^2 y, \ldots \varepsilon^{n-1} y$$

sein mögen, wo ε eine n^{te} Einheitswurzel ist. Und nun machen wir folgende *Annahme* (vgl. die zweite der oben gemachten Annahmen). *Die von den abhängigen Variabelen freien Irrationalitäten y_α $[\alpha = 1, 2, \ldots n]$ in dem System* (1) *mögen die Form haben*

$$(7) \qquad y_\alpha = r_\alpha y,$$

wo r_α eine rationale Funktion von $x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ bedeutet.

Da sämtliche Integralelemente $z_1, z_2, \ldots z_n$ rationale Funktionen von x und den Coefficienten des Systems (1) sind, so lässt sich z. B. z_1, wenn gerade dieses Element herausgegriffen wird, auf folgenden nach y geordneten Ausdruck bringen

$$(8) \quad z_1 = \varphi_0(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}) + \varphi_1(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}) y + \cdots + \varphi_{n-1}(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}) y^{n-1},$$

wo die φ-Grössen rational aus $x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ zusammengesetzt sind.

Lassen wir nun x einen solchen geschlossenen Umlauf machen, dass y in εy übergeht, während $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ unverändert bleiben, und nennen wir denjenigen z_α-Wert, der aus z_α durch die Substitution $\begin{pmatrix} y \\ \varepsilon y \end{pmatrix}$ hervorgeht, ζ_α, so nimmt die erste Gleichung in (1) die Form an

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = Y_{11}\zeta_1 + Y_{12}\zeta_2 + \cdots + Y_{1n}\zeta_n + \varepsilon r_1 y,$$

woraus folgt, dass

$$(9) \qquad Z_1 = \zeta_1 - \varepsilon z_1$$

ein algebraisches Integralelement des zu (1) zugehörigen reducirten Differentialgleichungssystems ist, welches sich aber wegen der für das letztere gemachten Annahme als eine rationale Funktion X von x und $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ darstellen lassen muss

$$Z_1 = \zeta_1 - \varepsilon z_1 = (1-\varepsilon)\varphi_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)\varphi_2 y^2 + (\varepsilon^3 - \varepsilon)\varphi_3 y^3 + \cdots + (\varepsilon^{n-1} - \varepsilon)\varphi_{n-1} y^{n-1} = \mathsf{X}(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}).$$

Da aber die irreduktible y-Gleichung (6) vom n^{ten} Grade war, so muss die letzte Gleichung identisch bestehen; daraus folgt durch Coefficientenvergleichung

(10) $(1-\varepsilon)\varphi_0 = X; \quad \varphi_2 = 0, \ \varphi_3 = 0, \ldots \varphi_{n-1} = 0,$

und somit lautet das obige Integralelement

(11) $$z_1 = \varphi_0 + \varphi_1 y.$$

φ_0 ist, wie aus

$$(1-\varepsilon)\varphi_0 = X$$

hervorgeht, ein partikuläres Integralelement des reducierten Systems und kann durch ein anderes partikuläres Integralelement desselben ersetzt werden, sodass $\varphi_1 y$ für sich allein schon ein Integralelement von (1) ist. Das Gleiche lässt sich in gleicher Weise von den ergänzenden Elementen zeigen.

Wir finden:

Lassen sich die von den abhängigen Variabelen freien Irrationalitäten y_α in der obigen Form durch die Grösse y ausdrücken, so lässt sich unter der für das reducierte System gemachten Annahme jedes algebraische Integralelement des Systems (1), *von einem additiven Multiplum eines partikulären Integralelementes der reducierten Differentialgleichungen abgesehen, darstellen als ein Produkt jener Irrationalität y und einer rationalen Funktion von x und $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$.*

Wenn statt des Systems (1) eine lineare nicht homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung vorgelegt ist

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} + Y_m z = y,$$

so lässt sich unter gleichen Annahmen auf dieselbe Weise zeigen, dass sich jedes algebraische Integral in die Form

$$z = \varphi_0(x, Y_1, \ldots Y_m) + \varphi_1(x, Y_1, \ldots Y_m)\, y$$

setzen lässt. Es gilt also derselbe Satz.

Beispiele:

1. $$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = a\sqrt[n]{x}$$

hat das Integral

$$z = n \,.\, ax \,.\, \sqrt[n]{x}$$

und da die zugehörige reducierte Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0$$

das rationale Integral

$$z = cx$$

hat, so lautet das allgemeine Integral der ersten Differentialgleichung

$$z = cx + nax\sqrt[n]{x}.$$

2. $$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = a\sqrt[n]{x}$$

hat, da die reducierte Differentialgleichung durch

$$z = cx^{-1}$$

erfüllt wird, das allgemeine Integral

$$z = \frac{c}{x} + \frac{n}{2n+1}ax\sqrt[n]{x}.$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \dfrac{1}{x}z_1 + \sqrt[3]{x} \\ \dfrac{dz}{dx} = z_1 \end{cases}$$

wird erfüllt durch

$$\begin{cases} z = \dfrac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x} \\ z_1 = 3\,x\,\sqrt[3]{x}, \end{cases}$$

während das reducierte System

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \dfrac{1}{x}z_1 \\ \dfrac{dz}{dx} = z_1 \end{cases}$$

die rationalen Integrale besitzt

$$z = x^2, \quad z_1 = 2x.$$

Der obige Satz lässt sich leicht noch etwas verallgemeinern. Seien die Irrationalitäten y_α wieder wie oben durch eine Funktion y ausgedrückt, unterliege diese aber nicht mehr der Beschränkung, Lösung einer binomischen Gleichung zu sein, vielmehr möge y die etwas allgemeinere Bedingung erfüllen, dass zwischen zwei Werten von y die Beziehung besteht

(12) $$\bar{y} = s\,y,$$

wo s eine rationale Funktion von x, $Y_{11}, \dots Y_{nn}$ ist. Dann

muss s eine μ^{te} Einheitswurzel ε sein (s. S. 3), und die Definitionsgleichung für y die Form haben (vgl. (g) S. 3)

$$(13) \qquad y^{\delta\mu} + \Omega_1(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y^{(\delta-1)\mu} + \cdots \\ + \Omega_{\delta-1}(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y^{\mu} + \Omega_\delta(x, Y_{11}, \dots Y_{nn}) = 0,$$

wo die Ω rationale Funktionen der in Klammer stehenden Grössen bedeuten. Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich jedes Integralelement, also z. B. z_1 in die Form setzen

$$(14) \qquad z_1 = \varphi_0(x, Y_{11}, \dots Y_{nn}) + \varphi_1(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y \\ + \varphi_2(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y^2 + \cdots + \varphi_{\delta\mu-1}(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y^{\delta\mu-1}.$$

Lassen wir jetzt wieder x einen geschlossenen Umlauf machen, dass y in ein Multiplum des früheren Wertes, also in εy übergeht, während $Y_{11}, \dots Y_{nn}$ ungeändert bleiben, so ist wieder mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise

$$Z_1 = \zeta_1 - \varepsilon z_1$$

ein algebraisches Integralelement des reducierten Differentialgleichungssystems, das sich der früheren Annahme nach rational durch $x, Y_{11}, \dots Y_{nn}$ ausdrücken lassen muss

$$(15) \quad Z_1 = \zeta_1 - \varepsilon z_1 = (1-\varepsilon)\varphi_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)\varphi_2 y^2 + (\varepsilon^3 - \varepsilon)\varphi_3 y^3 + \cdots \\ + (\varepsilon^{\delta\mu-1} - \varepsilon)\varphi_{\delta\mu-1}\, y^{\delta\mu-1} = X(x, Y_{11}, \dots Y_{nn}).$$

Fassen wir aber (15) als eine algebraische Gleichung in y auf, so hat dieselbe mit der irreduktiblen Gleichung (13), die vom Grade $\delta\mu$ war, eine Lösung gemein, und folglich muss (8) identisch bestehen. Daraus folgt zunächst

$$(1-\varepsilon)\varphi_0 = X,$$

und ferner muss

$$\varphi_i(x, Y_{11}, \dots Y_{nn}) = 0$$

sein, wenn nicht $\varepsilon^i - \varepsilon = 0$ oder $\varepsilon^{i-1} = 0$ ist. Die letzte Bedingung ist für $i = \varrho\mu + 1$ erfüllt, wo ϱ eine ganze Zahl bedeutet. Somit müssen in (15) alle φ-Funktionen mit Ausnahme von

$$\varphi_0, \quad \varphi_{\mu+1}, \quad \varphi_{2\mu+1}, \quad \dots \quad \varphi_{(\delta-1)\mu+1}$$

verschwinden, und folglich nimmt das Integralelement z_1 jetzt die Form an



$$z_1 = \varphi_0 + \varphi_1 y + \varphi_{\mu+1} y^{\mu+1} + \cdots + \varphi_{(\delta-1)\mu+1} y^{(\delta-1)\mu+1}$$

oder

$$(16) \qquad z_1 = \varphi_0 + y\left\{\varphi_1 + \varphi_{\mu+1} y^{\mu} + \cdots + \varphi_{(\delta-1)\mu+1} y^{(\delta-1)\mu}\right\}.$$

Aus demselben Grunde wie oben ist φ_0 ein partikuläres Integralelement eines Integralsystems des reducierten Systems und kann durch irgend ein constantes Multiplum eines rationalen partikulären Integralelementes des letzteren ersetzt werden, so dass der übrige Teil für sich allein ein Integralelement des Systems (1) ist.

Sehen wir von φ_0 ab, *so lässt sich unter den oben gemachten Annahmen jedes algebraische Integralelement* z_1 *in die Form setzen*

$$z_1 = y\left\{\varphi_1(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}) + \varphi_{\mu+1} y^{\mu} + \cdots + \varphi_{(\delta-1)\mu+1} y^{(\delta-1)\mu},\right\}$$

d. h. z_1 *teilt mit* y *die Eigenschaft, für einen Umlauf des* x, *der* y *verändert, dagegen* $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ *intakt lässt, in ein Multiplum und zwar auch in das* ε*-fache seines früheren Wertes zurückzugehen.*

Logarithmische Integrale.

Es sei das lineare nicht homogene Differentialgleichungssystem vorgelegt

$$1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = Y_{11} z_1 + Y_{12} z_2 + \cdots + Y_{1n} z_n + y_1 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = Y_{21} z_1 + Y_{22} z_2 + \cdots + Y_{2n} z_n + y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = Y_{n1} z_1 + Y_{n2} z_2 + \cdots + Y_{nn} z_n + y_n \end{cases}$$

mit der unabhängigen Variabelen x und den n abhängigen Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_n$. Die Grössen $Y_{11} \ldots Y_{nn}$, $y_1 \ldots y_n$ seien irreduktible algebraische Funktionen von x. Es habe ein Element z_1 eines Integralsystems die Form

$$(2) \quad z_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

worin die A-Grössen Constanten und $u, v_1, \ldots v_\varrho$ Lösungen

algebraischer Gleichungen in x bedeuten, welche mit Adjungierung der Coefficienten $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$, $y_1, \ldots y_n$ des Systems (1) irreduktibel sind. Dann werden sich im allgemeinen die ergänzenden Elemente dieses Integralsystems linear durch eben diese Logarithmen ausdrücken lassen, und es lässt sich ferner mit Hülfe des oben angeführten *Abel*'schen Satzes zeigen, dass dann auch noch ein anderes Integralelement von der Form

$$(3) \quad \zeta_1 = U + B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \cdots + B_\varrho \log V_\varrho$$

existiert, worin die Grössen $U, V_1, \ldots V_\varrho$ algebraisch rationale Funktionen von $x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}, y_1, \ldots y_n$ sind, während die B-Grössen wieder Constanten bedeuten *).

Um Bedingungen zu ermitteln, wann ein solches logarithmisches Integral für (1) existiert, machen wir folgende *Annahmen:*

1. *Das zu* (1) *zugehörige reducierte Differentialgleichungssystem habe keine logarithmischen Integrale.*

2. *Die Irrationalitäten $y_1, \ldots y_n$ lassen sich sämtlich durch eine andre Grösse y rational ausdrücken*

$$y_\alpha = r_\alpha y\,,$$

wo r_α eine rationale Funktion von x und $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ bedeutet, während y die Lösung einer mit Adjungierung von $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ irreduktiblen Gleichung ist von der Eigenschaft, dass zwischen zwei Werten von y die Beziehung besteht

$$\bar{y} = s\,y\,,$$

wo s wieder eine rationale Funktion von $x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ ist; dieselbe muss dann eine μ^{te} Einheitswurzel ε sein, und die Definitionsgleichung für y die Form (g) *S. 3 haben* (s. S. 2 u. S. 8).

Wir untersuchen jetzt nach einander die Fälle, in denen $\varrho = 1, 2, 3, 4$ ist.

$\varrho = 1.$

Es sei das System (1) vorgelegt, und es möge ein Element eines Integralsystems die Form

*) *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 300.

(4) $$z_1 = A_1 \log v_1$$

haben, worin A_1 eine Constante und v_1 die Lösung einer mit Adjungierung von $x, Y_{11}, \dots Y_{nn}$ irreduktiblen algebraischen Gleichung ist. Dann werden sich im allgemeinen die ergänzenden Elemente dieses Integralsystems durch eben diese Grösse $\log v_1$ ausdrücken lassen, und wir dürfen ferner nach dem Obigen v_1 als eine algebraisch rationale Funktion von x und den Coefficienten in (1) betrachten. Mit Benutzung der zweiten Annahme lässt sich v_1 in die Form setzen

(5) $$v_1 = \varphi_0(x, Y_{11}, \dots Y_{nn}) + \varphi_1(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y + \cdots + \varphi_{\delta_\mu - 1}(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y^{\delta\mu - 1}. \text{*)}$$

Lassen wir nun die Variabele x solche geschlossenen Umläufe machen, welche y in εy überführen, während die Coefficienten $Y_{11}, \dots Y_{nn}$ intakt bleiben, so ist leicht zu erkennen, dass

(6) $$Z_1^{(1)} = A_1 \log v_1^{(1)}$$

mit den entsprechenden Werten der andern z-Grössen die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(1)}}{dx} = Y_{11} z_1^{(1)} + Y_{12} z_2^{(1)} + \cdots + Y_{1n} z_n^{(1)} + \varepsilon y_1$$

erfüllt, wobei die mit dem oberen Index $^{(1)}$ versehenen Grössen aus den entsprechenden Grössen ohne Index hervorgehen, wenn auf letztere die Substitution $\begin{pmatrix} y \\ \varepsilon y \end{pmatrix}$ angewendet wird.

$$\frac{dz_1^{(1)}}{dx} = Y_{11} z_1^{(1)} + Y_{12} z_2^{(1)} + \cdots + Y_{1n} z_n^{(1)} + \varepsilon y_1$$

$$\frac{dz_1}{dx} = Y_{11} z_1 + Y_{12} z_2 + \cdots + Y_{1n} z_n + y_1$$

$$\frac{d(z_1^{(1)} - \varepsilon z_1)}{dx} = Y_{11}(z_1^{(1)} - \varepsilon z_1) + Y_{12}(z_2^{(1)} - \varepsilon z_2) + \cdots + Y_{1n}(z_n' - \varepsilon z_n),$$

oder wenn

(7) $$z_\alpha' - \varepsilon z_\alpha = \zeta_\alpha^{(1)}$$

gesetzt wird,

(8) $$\frac{d\zeta_1^{(1)}}{dx} = Y_{11} \zeta_1^{(1)} + Y_{12} \zeta_2^{(1)} + \cdots + Y_{1n} \zeta_n^{(1)}.$$

---

*) Vgl. S. 12.

In gleicher Weise können wir aus (1) noch $(n-1)$ Gleichungen herleiten, welche mit (8) das zu (1) zugehörige reducierte System bilden. Das Resultat lässt sich dahin deuten, dass das reducierte System durch

$$(9)\quad \zeta_1^{(1)} = z_1^{(1)} - \varepsilon z_1\,, \quad \zeta_2^{(1)} = z_2^{(1)} - \varepsilon z_2\,, \ldots \zeta_n^{(1)} = z_n^{(1)} - \varepsilon z_n$$

erfüllt wird. Beachten wir jetzt die für das letztere eingeführte Bedingung, wonach demselben keine logarithmischen Integrale zukommen dürfen, so müssen die ζ_α-Grössen algebraische Funktionen, ja sogar Constanten sein*). Also z. B.

$$(10)\quad \zeta_1^{(1)} = z_1^{(1)} - \varepsilon z_1 = A_1 (\log v_1^{(1)} - \varepsilon \log v_1) = \omega_1\,,$$

wo ω_1 eine Constante bedeutet. Nun lautet aber ein bekannter Satz über Relationen zwischen Logarithmen:

Besteht eine Beziehung von der Form

$$(11)\quad A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho = \omega\,,$$

worin die Grössen $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ und ω algebraische Funktionen und die A-Grössen Constanten bedeuten, so muss zwischen den Coefficienten die Beziehung bestehen

$$(12)\quad k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_\varrho A_\varrho\,,$$

wobei $k_1, k_2, \ldots k_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten, und eine derselben sicher von Null verschieden ist.

Wenden wir diesen Satz auf (10) an, so ergiebt sich

$$(13)\quad K_1 - \varepsilon k_1 = 0$$

oder

$$\varepsilon = \frac{K_1}{k_1}\,,$$

wo k_1 von Null verschieden ist, d. h. ε ist eine rationale Zahl. Wenn aber die μ^{te} primitive Einheitswurzel ε, also

$$\sqrt[\mu]{1} = \cos\frac{2\pi}{\mu} + i \sin\frac{2\pi}{\mu}$$

rational sein soll, so kann μ nur die Werte 1 oder 2 haben, und es muss $\varepsilon = \pm 1$ sein.

Das lineare nicht homogene Differentialgleichungssystem (1)

*) *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 209.

$$\frac{dz_\alpha}{dx} = Y_{\alpha 1} z_1 + Y_{\alpha 2} z_2 + \cdots + Y_{\alpha n} z_n + y_\alpha; \quad \alpha = |_1^n,$$

in welchem die von den abhängigen Variabelen freien Glieder y_α sich sämtlich in der obigen Weise durch eine einzige algebraische Funktion y ausdrücken lassen, wobei y der Bedingung unterliegt, dass zwei ihrer Werte in der Beziehung $\bar{y} = \varepsilon y$ stehen, kann, falls das zugehörige reducierte System keine logarithmischen Integrale besitzt, nur dann ein Integralsystem mit einem Elemente von der Form

$$z_1 = A_1 \log v_1$$

haben, wenn $\mu = 1$ oder 2 ist und $\varepsilon = \pm 1$.

Der Fall $\mu = 1$ ist schon durch die Annahme und die Schlussweise mit ε angeschlossen. Ist in (g) S. 3 die Grösse $\delta = 1$, d. h. stehen sämtliche Lösungen der y-Gleichung in der angegebenen Beziehung, so ist y eine reine Irrationalität, definiert durch eine binomische Gleichung, die vom zweiten Grade sein muss. Ist dagegen y durch eine binomische Gleichung, deren Grad den zweiten übersteigt, definiert, so kann das vorgelegte System kein Integralelement der obigen Form haben. (Vgl. Beispiel 3 S. 11.)

Der obige Satz gilt selbstverständlich für eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung. (S. das zweite Beispiel.)

1.
$$\frac{dz}{dx} = z_1$$
$$\frac{dz_1}{dx} = z_2$$
$$\frac{dz_2}{dx} = \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) z_1 + \left(\frac{2}{7}\sqrt{x^5} - 1\right) z_2 + \sqrt{x}$$

hat als Integralsystem

$$z = \log x^3 \sqrt{x}$$
$$z_1 = \frac{7}{2x}$$
$$z_2 = -\frac{7}{2x^2}.$$

2.
$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{2}{5} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} = \sqrt{x}$$

mit dem Integral

$$z = \log x^{\frac{5}{2}} = \log x^2 \cdot \sqrt{x}.$$

Bevor wir nun weiter diejenigen Fälle untersuchen, in denen die Integralfunktion aus der Summe zweier, dreier etc. Logarithmen besteht, schicken wir folgende Zwischenbetrachtung voraus.

Es sei wieder das Differentialgleichungssystem (1) vorgelegt, und es habe ein Integralelement die Form

$$(14) \qquad z_1 = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

worin die v-Grössen Lösungen algebraischer Gleichungen in x bedeuten, welche mit Adjungierung der Coefficienten des Systems (1) irreduktibel sind. Nach dem Satze S. 14 dürfen wir dann die v-Grössen als rationale Funktionen von x und den Coefficienten des Systems (1) voraussetzen. Die A-Grössen mögen Constanten sein. Fassen wir die erste der Gleichungen (1) auf, und lassen wir x solche geschlossenen Umläufe machen, welche y in εy überführen, — wo ε eine μ^{te} primitive Einheitswurzel ist — während die Coefficienten $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ ungeändert bleiben, so erfüllt aus denselben Gründen wie oben, wenn wir die frühere Bezeichnungsweise beibehalten,

$$(15) \qquad z_1^{(1)} = A_1 \log v_1^{(1)} + A_2 \log v_2^{(1)} + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho^{(1)}$$

mit den entsprechenden Werten der übrigen z-Grössen die Gleichung

$$(16) \qquad \frac{dz_1^{(1)}}{dx} = Y_{11} z_1^{(1)} + Y_{12} z_2^{(1)} + \cdots + Y_{1n} z_n^{(1)} + \varepsilon y_1.$$

Folglich muss

$$(17) \qquad \zeta_1^{(1)} = z_1^{(1)} - \varepsilon z_1$$

ein Integralelement des reducierten Systems sein, und da diesem der gemachten Annahme nach kein logarithmisches Integral dieser Form zukommen soll, so muss der letzte Ausdruck gleich einer Constanten $w_1^{(1)}$ sein

$$(18) \qquad \zeta_1^{(1)} = z_1^{(1)} - \varepsilon z_1 = A_1 (\log v_1^{(1)} - \varepsilon \log v_1) \\ + A_2 (\log v_2^{(1)} - \varepsilon \log v_2) + \cdots + A_\varrho (\log v_\varrho^{(1)} - \varepsilon \log v_\varrho) = w_1^{(1)}.$$

Betrachten wir in diesem Ausdrucke die Grössen $v_1, v_2, \ldots v_{\varrho-1}$, $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots v_\varrho^{(1)}$ als algebraische Funktionen von v_ϱ, welch' letztere selbst wir als die Variabele auffassen*), so können wir v_ϱ den Nullpunkt so oft umkreisen lassen, bis die genannten Grössen zu ihren Ausgangswerten zurückkehren. Die Anzahl dieser Umkreisungen ist leicht zu bestimmen. Fassen wir z. B. v_1 und $v_1^{(1)}$, beide als Funktionen von v_ϱ betrachtet, auf. Beide mögen um $v_\varrho = 0$ einen Cyclus aus m_1 Elementen besitzen. Nach m_1 oder $k_1 m_1$ Umläufen, wo k_1 eine ganze Zahl bedeutet, kehren dann v_1 und $v_1^{(1)}$ zu ihrem ursprünglichen Werte zurück. Ähnliches gilt für v_2 und $v_2^{(1)}$ etc. Wird das Produkt aller derjenigen Zahlen, die die Anzahl der Elemente der Cyclen der genannten Funktionen angeben, mit P bezeichnet, so ist P oder $k \cdot P$ eine passende Anzahl der beabsichtigten Umläufe. Bei diesen Umläufen erhalten wir

$$(19)\begin{cases} \quad A_1 \left\{\log v_1^{(1)} + K_1\, 2\pi i - \varepsilon \log v_1 - \varepsilon\, k_1\, 2\pi i\right\} \\ + A_2 \left\{\log v_2^{(1)} + K_2\, 2\pi i - \varepsilon \log v_2 - \varepsilon\, k_2\, 2\pi i\right\} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + A_\varrho \left\{\log v_\varrho^{(1)} + K_\varrho\, 2\pi i - \varepsilon \log v_\varrho - \varepsilon k_\varrho\, 2\pi i\right\} = w^{(1)}, \end{cases}$$

woraus mit Berücksichtigung der Gleichung (18) folgt

$$(20)\quad A_1 (K_1 - \varepsilon k_1) + A_2 (K_2 - \varepsilon k_2) + \cdots + A_\varrho (K_\varrho - \varepsilon k_\varrho) = 0 .$$

Hierin bedeuten K.. und k.. ganze Zahlen, und es ist sicher k_ϱ eine von Null verschiedene Zahl.

Die hergeleitete Relation könnte nun identisch bestehen, indem jede Klammer einzeln verschwände; dann aber müsste die μ^{te} primitive Einheitswurzel ε rational und zwar gleich ± 1 sein und μ die Werte 1 oder 2 haben. Schliessen wir diese Werte aus — und wir sind hierzu berechtigt, da sonst die letzte Gleichung eine lineare homogene Relation der A-Grössen mit rationalen Coefficienten bedeuten würde, was andererseits wieder eine Reduktion der Anzahl der im Integralelement

*) Wenn x zwischen den Definitionsgleichungen für v_1 und v_ϱ eliminiert wird, so folgt v_1 als algebraische Funktion von v_ϱ. Dasselbe für die anderen Grössen.

vorkommenden Logarithmen zur Folge haben würde*) — so sagt die letzte Gleichung aus: Es besteht zwischen den Coefficienten der vorgelegten logarithmischen Integralbeziehung eine lineare homogene Relation, deren Coefficienten sich rational durch die μ^{te} Einheitswurzel ε ausdrücken.

Da in (20) noch sämtliche A-Grössen enthalten sind, diese aber ihrem Wesen nach uns unbekannt sind, so können wir aus dieser Gleichung noch keine Schlüsse auf ε und weiter dann auf μ machen. Es kommt jetzt darauf an — und das ist wieder der einfache Grundgedanke für die folgenden Betrachtungen — nach und nach die A-Grössen zu eliminieren. Aus (20) folgt

$$(21)\quad A_\varrho = -A_1 \frac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} - A_2 \frac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} - \cdots - A_\varrho \frac{K_{\varrho-1} - \varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho},$$

wodurch (14) die Form annimmt

$$(22)\quad \begin{cases} z_1 = A_1 \left\{ \log v_1 - \dfrac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \log v_\varrho \right\} \\ \quad + A_2 \left\{ \log v_2 - \dfrac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \log v_\varrho \right\} \\ \quad + \cdots\cdots\cdots \\ \quad + A_{\varrho-1} \left\{ \log v_{\varrho-1} - \dfrac{K_{\varrho-1} - \varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \log v_\varrho \right\}. \end{cases}$$

Beachten wir jetzt, dass z_1 ein Integralelement des Systems (1) ist, und lassen wir nun x solche geschlossenen Umläufe machen, dass y in $\varepsilon^2 y$ übergeht, während die übrigen Coefficienten ihre Werte nicht ändern, so erfüllt, wenn die durch die Substitution $\begin{pmatrix} y \\ \varepsilon^2 y \end{pmatrix}$ hervorgerufenen Veränderungen durch den oberen Index ${}^{(2)}$ bezeichnet werden,

$$(23)\quad \begin{cases} z_1^{(2)} = A_1 \left\{ \log v_1^{(2)} - \dfrac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \log v_\varrho^{(2)} \right\} \\ \quad + A_2 \left\{ \log v_2^{(2)} - \dfrac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \log v_\varrho^{(2)} \right\} \\ \quad + \cdots\cdots\cdots \\ \quad + A_{\varrho-1} \left\{ \log v_{\varrho-1}^{(2)} - \dfrac{K_{\varrho-1} - \varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \log v_\varrho^{(2)} \right\} \end{cases}$$

---

*) *Abel's* ges. Werke I. S. 559.

— mit den ergänzenden Elementen dieses Integralsystems — die Gleichung

$$(24)\qquad \frac{dz_1^{(2)}}{dx} = Y_{11} z_1^{(2)} + Y_{12} z_2^{(2)} + \cdots + Y_{1n} z_n^{(2)} + \varepsilon^2 y_1 .$$

Hieraus folgt, dass

$$(25)\qquad \zeta_1^{(2)} = z_1^{(2)} - \varepsilon^2 z_1$$

ein Integralelement des reducierten Systems ist, und da dieses der gemachten Voraussetzung gemäss kein logarithmisches Integral dieser Form besitzt, so muss $\zeta_1^{(2)}$ eine Konstante $w^{(2)}$ sein

$$(26)\left\{\begin{aligned} & A_1\left\{\log v_1^{(2)} - \varepsilon^2 \log v_1 - \frac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho}\left(\log v_\varrho^{(2)} - \varepsilon^2 \log v_\varrho\right)\right\} \\ & + A_2\left\{\log v_2^{(2)} - \varepsilon^2 \log v_2 - \frac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho}\left(\log v_\varrho^{(2)} - \varepsilon^2 \log v_\varrho\right)\right\} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + A_{\varrho-1}\left\{\log v_{\varrho-1}^{(2)} - \varepsilon^2 \log v_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1} - \varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho}\left(\log v_\varrho^{(2)} - \varepsilon^2 \log v_\varrho\right)\right\} = w^{(2)}. \end{aligned}\right.$$

Fassen wir in dieser Gleichung, genau so wie oben, die Grössen

$$v_1^{(2)},\ v_2^{(2)}, \ldots v_\varrho^{(2)},\qquad v_1,\ v_2, \ldots v_{\varrho-1}$$

als algebraische Funktionen von v_ϱ auf, so können wir v_ϱ so oft den Nullpunkt umkreisen lassen, bis jene genannten Funktionen ihren Ausgangswert wieder angenommen haben. Die Anzahl dieser Umkreisungen kann nach dem oben Gesagten jedes Multiplum des Produktes sein, gebildet aus der Elementenanzahl der Cyclen, welche die einzelnen genannten Funktionen um $v_\varrho = 0$ besitzen. Sei dieses Produkt Q, und denken wir uns, wir hätten oben S. 19 bei Herleitung der Gleichung (19) nicht P, sondern $P \cdot Q$ Umläufe gemacht, so werden diese Umläufe sowohl oben wie hier genügen, indem bei diesen Umläufen $v_1, v_2, \ldots v_{\varrho-1}, v_1^{(1)}, \ldots v_\varrho^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots v_\varrho^{(2)}$ zu ihren Ausgangswerten zurückkommen. Lassen wir also in der letzten Gleichung v_ϱ diese Umläufe machen, so nimmt $\log v_\varrho$ um $k_\varrho\, 2\pi i$ zu, wo sicher k_ϱ eine ganze von Null verschiedene Zahl ist. Nennen wir den Zuwachs der einzelnen Funktionen

$$\log v_1, \dots \log v_\varrho, \qquad \log v_1^{(2)}, \dots \log v_\varrho^{(2)},$$
$$k_1\, 2\pi i, \dots k_\varrho\, 2\pi i, \qquad L_1\, 2\pi i, \dots L_\varrho\, 2\pi i,$$

wo die Grössen $L_1, .. L_\varrho$ ebenfalls ganze Zahlen und $k_1, \dots k_\varrho$ dieselben Zahlen sind, wie in der Gleichung (19), so folgt

$$(27)\left\{\begin{aligned} & A_1 \Big\{ \log v_1^{(2)} + L_1\, 2\pi i - \varepsilon^2 \log v_1 - \varepsilon^2 k_1\, 2\pi i \\ & \qquad - \frac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \Big(\log v_\varrho^{(2)} + L_\varrho\, 2\pi i - \varepsilon^2 \log v_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho\, 2\pi i \Big) \Big\} \\ + \; & A_2 \Big\{ \log v_2^{(2)} + L_2\, 2\pi i - \varepsilon^2 \log v_2 - \varepsilon^2 k_2\, 2\pi i \\ & \qquad - \frac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \Big(\log v_\varrho^{(2)} + L_\varrho\, 2\pi i - \varepsilon^2 \log v_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho 2\pi i \Big) \Big\} \\ + \; & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \; & A_{\varrho-1} \Big\{ \log v_{\varrho-1}^{(2)} + L_{\varrho-1} 2\pi i - \varepsilon^2 \log v_{\varrho-1} - \varepsilon^2 k_{\varrho-1}\, 2\pi i \\ & \qquad - \frac{K_{\varrho-1} - \varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \Big(\log v_\varrho^{(2)} + L_\varrho\, 2\pi i - \varepsilon^2 \log v_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho 2\pi i \Big) \Big\} = w^{(2)}. \end{aligned}\right.$$

Subtrahieren wir die Gleichung (26) von (27), so folgt, wenn gleichzeitig durch $2\pi i$ dividiert wird,

$$(28)\left\{\begin{aligned} & A_1 \Big\{ L_1 - \varepsilon^2 k_1 - \frac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \Big(L_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho \Big) \Big\} \\ + \; & A_2 \Big\{ L_2 - \varepsilon^2 k_2 - \frac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \Big(L_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho \Big) \Big\} \\ + \; & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \; & A_{\varrho-1} \Big\{ L_{\varrho-1} - \varepsilon^2 k_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1} - \varepsilon k_{\varrho-1}}{K_\varrho - \varepsilon k_\varrho} \Big(L_\varrho - \varepsilon^2 k_\varrho \Big) \Big\} = 0, \end{aligned}\right.$$

oder nach Multiplikation mit $K_\varrho - \varepsilon k_\varrho$

$$(29)\left\{\begin{aligned} & A_1 \{ (K_1 k_\varrho - k_1 K_\varrho)\, \varepsilon^2 + (k_1 L_\varrho - L_1 k_\varrho)\, \varepsilon + (L_1 K_\varrho - K_1 L_\varrho) \} \\ + \; & A_2 \{ (K_2 k_\varrho - k_2 K_\varrho)\, \varepsilon^2 + (k_2 L_\varrho - L_2 k_\varrho)\, \varepsilon + (L_2 K_\varrho - K_2 L_\varrho) \} \\ + \; & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \; & A_{\varrho-1} \{ (K_{\varrho-1} k_\varrho - k_{\varrho-1} K_\varrho) \varepsilon^2 + (k_{\varrho-1} L_\varrho - L_{\varrho-1} k_\varrho) \varepsilon + (L_{\varrho-1} K_\varrho - K_{\varrho-1} L_\varrho) \} = 0. \end{aligned}\right.$$

Das erlangte Resultat stellt eine Gleichung für ε dar, in der schon — und darin liegt gerade die Bedeutung des Ausdruckes — ein Coefficient A_ϱ der vorgelegten logarithmischen Beziehung fehlt. Durch ähnliche Betrachtungen wird es

möglich sein, nach einander auch die übrigen A-Grössen zu eliminieren, bis wir zuletzt als Resultat eine ganzzahlige Gleichung in ε erhalten, aus der wir dann auf die Zahl μ, zu der die primitive Einheitswurzel ε gehört, schliessen können.

Diese Aufgabe soll jetzt für den Fall $\varrho = 2, 3, 4$, durchgeführt werden.

$\varrho = 2.$

Es sei wieder das System (1) vorgelegt

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = Y_{11} z_1 + Y_{12} z_2 + \cdots + Y_{1n} z_n + y_1 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = Y_{21} z_1 + Y_{22} z_2 + \cdots + Y_{2n} z_n + y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = Y_{n1} z_1 + Y_{n2} z_2 + \cdots + Y_{nn} z_n + y_n, \end{cases}$$

und es setze sich ein Element eines Integralsystems — also im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente dieses Systems — linear aus zwei Logarithmen zusammen, also

$$(31)\qquad z_1 = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2,$$

so lautet die Relation (29)

$$(32)\ A_1 \{ (K_1 k_2 - k_1 K_2)\varepsilon^2 + (k_1 L_2 - L_1 k_2)\varepsilon + (L_1 K_2 - K_1 L_2) \} = 0$$

oder, da A_1 eine von Null verschiedene Zahl ist,

$$(33)\ (K_1 k_2 - k_1 K_2)\varepsilon^2 + (k_1 L_2 - L_1 k_2)\varepsilon + (L_1 K_2 - K_1 L_2) = 0.$$

D. h. für den Fall $\varrho = 2$ muss ε einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten genügen. Dieser Schluss ist nur dann hinfällig, wenn entweder der erste oder der dritte Posten Null wäre, indem sich dann für ε eine lineare Gleichung ergäbe, woraus ε als rationale Zahl und zwar gleich ± 1 gefolgert werden könnte. Dann aber sagte die Beziehung (20), die für $\varrho = 2$ lautet

$$(34)\qquad A_1 (K_1 - \varepsilon k_1) + A_2 (K_2 - \varepsilon k_2) = 0,$$

aus, dass zwischen den Coefficienten der Logarithmen des Integrals eine lineare homogene Relation mit ganzzahligen Coefficienten stattfindet, was aus bekannten Gründen ausgeschlossen ist, da sonst eine Reduktion der Logarithmen

im Integral möglich ist, und dieses dann aus einem einzigen Logarithmus bestehen würde, ein Fall, der oben erledigt wurde.

Es muss also ε einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten genügen, und es fragt sich jetzt, welche Werte muss dann μ haben?

Eine einfache algebraische Betrachtung lehrt, dass μ die Werte 3, 4, 6 haben muss.

Wir finden den Satz:

Hat das lineare, nicht homogene Differentialgleichungssystem

$$\frac{dz_\alpha}{dx} = Y_{\alpha 1} z_1 + Y_{\alpha 2} z_2 + \cdots + Y_{\alpha n} z_n + y_\alpha ; \quad \alpha = \Big|_1^n ,$$

in welchem die freien Glieder y_α *sich sämtlich in der obigen Weise durch eine andre algebraische Funktion* y *von der Eigenschaft, dass zwischen zwei Werten desselben die Beziehung* $\bar{y} = \varepsilon y$ *besteht, ausdrücken lassen, ein Integralelement, das sich — also im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente — linear durch zwei Logarithmen zusammensetzt*

$$z_1 = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 ,$$

so muss, falls dem reducierten System kein solches logarithmisches Integral zukommt, μ *die Werte* 3, 4, 6 *haben.*

$\varrho = 3.$

Es habe jetzt ein Element eines simultanen Integralsystems des Systems (1) die Form

$$z_1 = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + A_3 \log v_3 , \tag{35}$$

so erfüllt, wenn wir die frühere Bezeichnungsweise beibehalten,

$$z_1^{(1)} = A_1 \log v_1^{(1)} + A_2 \log v_2^{(1)} + A_3 \log v_3^{(1)} \tag{36}$$

mit den entsprechenden Werten der ergänzenden Elemente, die sich im allgemeinen auch durch dieselben Logarithmen ausdrücken lassen, die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(1)}}{dx} = Y_{11} z_1^{(1)} + Y_{12} z_2^{(1)} + \cdots + Y_{1n} z_n^{(1)} + \varepsilon y .$$

Durch bekannte Schlussweise ergiebt sich dann die der Gleichung (20) S. 19 entsprechende Gleichung

$$A_1 (K_1 - \varepsilon k_1) + A_2 (K_2 - \varepsilon k_2) + A_3 (K_3 - \varepsilon k_3) = 0 , \tag{37}$$

oder wenn zur Abkürzung

(38) $$K_i - \varepsilon k_i = a_i$$

gesetzt wird,

(39) $$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0,$$

woraus folgt

(40) $$A_3 = - A_1 \frac{a_1}{a_3} - A_2 \frac{a_2}{a_3}.$$

Dann lässt sich das angenommene Integral (35) in die Form setzen

(41) $$z_1 = A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{a_1}{a_3} \log v_3 \right\} + A_2 \left\{ \log v_2 - \frac{a_2}{a_3} \log v_3 \right\}.$$

Lassen wir jetzt x solche geschlossenen Umläufe machen, dass y in $\varepsilon^2 y$ übergeht, während die übrigen Coefficienten $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ des Systems (1) ungeändert bleiben, so ergiebt sich die Gleichung (29) S. 22, welche für den Fall $\varrho = 3$ lautet

(42) $$\begin{cases} A_1 \{ (K_1 k_3 - k_1 K_3)\varepsilon^2 + (k_1 L_3 - L_1 k_3)\varepsilon + (L_1 K_3 - K_1 L_3) \} \\ + A_2 \{ (K_2 k_3 - k_2 K_3)\varepsilon^2 + (k_2 L_3 - L_2 k_3)\varepsilon + (L_2 K_3 - K_2 L_3) \} = 0 \end{cases}$$

oder

(43) $$A_1 b_{13} + A_2 b_{23} = 0,$$

indem für die Klammern der Kürze wegen b_{13} und b_{23} gesetzt wird.

Um nun aus dieser Gleichung, welcher die μ^{te} Einheitswurzel ε genügen muss, Schlüsse für ε und μ ziehen zu können, ist es nötig, die uns ihrem Charakter nach unbekannten Coefficienten A.. herauszuschaffen. Zu dem Zwecke beachten wir, dass aus der letzten Gleichung

(44) $$A_2 = - A_1 \frac{b_{13}}{b_{23}}$$

folgt, wodurch das Integralelement z_1 in (41) nunmehr die Form annimmt

$$z_1 = A_1 \left\{ \left(\log v_1 - \frac{a_1}{a_3} \log v_3 \right) - \frac{b_{13}}{b_{23}} \left(\log v_2 - \frac{a_2}{a_3} \log v_3 \right) \right\}$$

oder

(45) $$z_1 = A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{b_{13}}{b_{23}} \log v_2 + \left(\frac{a_2}{a_3} \frac{b_{13}}{b_{23}} - \frac{a_1}{a_3} \right) \log v_3 \right\}.$$

Lassen wir nun x solche geschlossenen Umläufe machen,

dass y in $\varepsilon^3 y$ übergeht, während die übrigen Coefficienten in (1) ungeändert bleiben, so erfüllt, wenn die durch die Substitution $\left(\begin{smallmatrix} y \\ \varepsilon^3 y \end{smallmatrix}\right)$ hervorgerufenen Veränderungen durch den oberen Index $^{(3)}$ angezeigt werden,

$$(46)\quad z_1^{(3)} = A_1 \left\{ \log v_1^{(3)} - \frac{b_{13}}{b_{23}} \log v_2^{(3)} + \left(\frac{a_2}{a_3}\frac{b_{13}}{b_{23}} - \frac{a_1}{a_3}\right) \log v_3^{(3)} \right\}$$

mit den entsprechenden ergänzenden Elementen dieses Integralsystems die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(3)}}{dx} = Y_{11} z_1^{(3)} + Y_{12} z_2^{(3)} + \cdots + Y_{1n} z_n^{(3)} + \varepsilon^3 y_1 .$$

Dann aber muss

$$(47)\qquad \zeta_1^{(3)} = z_1^{(3)} - \varepsilon^3 z_1$$

ein Integralelement des reducierten Systems sein und als solches wegen der für das letztere gemachten Annahme gleich einer Constanten $w^{(3)}$ sein

$$(48)\quad \zeta_1^{(3)} = A_1 \left\{ \log v_1^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_1 - \frac{b_{13}}{b_{23}} \left(\log v_2^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_2\right) + \left(\frac{a_2}{a_3}\frac{b_{13}}{b_{23}} - \frac{a_1}{a_3}\right) \left(\log v_3^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_3\right) \right\} = w^{(3)} .$$

Um nun hieraus die gesuchte Gleichung für ε herzuleiten, fassen wir

$$v_1^{(3)}, \quad v_2^{(3)}, \quad v_3^{(3)}, \quad v_1, \quad v_2$$

als algebraische Funktionen von v_3 auf — wie Ähnliches zur Herleitung der Gleichungen (37) und (42) geschehen ist — und lassen v_3 so oft den Nullpunkt umkreisen, bis die genannten Funktionen ihre Ausgangswerte wieder angenommen haben. Dabei mögen

$$\log v_1, \quad \log v_2, \quad \log v_3, \quad \log v_1^{(3)}, \quad \log v_2^{(3)}, \quad \log v_3^{(3)}$$

um

$$k_1 2\pi i, \quad k_2 2\pi i, \quad k_3 2\pi i, \quad M_1 2\pi i, \quad M_2 2\pi i, \quad M_3 2\pi i$$

zugenommen haben, und zwar sind die Zahlen k_1, k_2, k_3 dieselben wie in Gleichung (37) und (42), indem wir uns vorstellen, dass schon oben ein solches Multiplum der lediglich zur Herleitung von (37) und (42) erforderlich gewesenen Umläufe ausgeführt wurde, dass die Anzahl jener Umkreisungen

auch hier genügt. Dann folgt, wenn von der neu entstehenden Gleichung die Gleichung (48) subtrahiert und gleichzeitig durch $A_1 2\pi i$ dividiert wird,

(49) $$M_1 - \varepsilon^3 k_1 - \frac{b_{13}}{b_{23}}\left(M_2 - \varepsilon^3 k_2\right) + \left(\frac{a_2}{a_3}\frac{b_{13}}{b_{23}} - \frac{a_1}{a_3}\right)\left(M_3 - \varepsilon^3 k_3\right) = 0,$$

oder

(50) $$(M_1 - \varepsilon^3 k_1)\, a_3\, b_{23} - a_3\, b_{13}\, (M_2 - \varepsilon^3 k_2) + (a_2 b_{13} - a_1 b_{23})\,(M_3 - \varepsilon^3 k_3) = 0.$$

Damit haben wir für ε eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten gewonnen. Sie ist vom 6. Grade; es wird sich jedoch zeigen, dass der Coefficient von ε^6 und ε^5 verschwindet, dass dagegen der Coefficient von ε^4 nicht verschwinden kann, so dass ε einer biquadratischen ganzzahligen Gleichung genügen muss.

Der Coefficient von ε^6 lautet:

$$\begin{aligned}&(-k_1)(-k_3)(K_2 k_3 - k_2 K_3) - (-k_3)(-k_2)(K_1 k_3 - k_1 K_3)\\ &+(-k_2)(-k_3)(K_1 k_3 - k_1 K_3) - (-k_1)(-k_3)(K_2 k_3 - k_2 K_3)\\ &=(K_1 k_3 - k_1 K_3)(k_2 k_3 - k_2 k_3) + (K_2 k_3 - k_2 K_3)(k_1 k_3 - k_1 k_3) = 0.\end{aligned}$$

Der Coefficient von ε^5 lautet:

$$\begin{aligned}&- k_1\,[K_3\,(K_2\,k_3 - k_2\,K_3) - k_3\,(k_2\,L_3 - L_2\,k_3)]\\ &+ k_2\,[K_3\,(K_1\,k_3 - k_1\,K_3) - k_3\,(k_1\,L_3 - L_1\,k_3)]\\ &- k_3\,[K_2\,(K_1\,k_3 - k_1\,K_3) - k_2\,(k_1\,L_3 - L_1\,k_3)\\ &- K_1\,(K_2\,k_3 - k_2\,K_3) - k_1\,(L_2\,k_3 - k_2\,L_3)]\\ &= (k_2\,L_3 - L_2\,k_3)\,(k_1\,k_3 - k_1\,k_3) + (k_1\,L_3 - L_1\,k_3)\,(k_2\,k_3 - k_2\,k_3)\\ &+ (K_1 k_3 - k_1 K_3)(K_2 k_3 - k_2 K_3) + (K_1 k_3 - k_1 K_3)(k_2 K_3 - K_2 k_3) = 0.\end{aligned}$$

Somit genügt ε jedenfalls einer ganzzahligen, biquadratischen Gleichung, und es bleibt nun zu zeigen übrig, dass der Grad sich nicht weiter reducieren lässt, dass also der Coefficient von ε^4 nicht verschwinden kann. Denn wäre dies der Fall, so genügte ε als primitive μ^{te} Einheitswurzel einer Gleichung

(51) $$x^m + x^{m-1} + \cdots + x + 1 = 0,$$

deren Grad $m < 4$ wäre. Nun lehrt die Algebra, dass der Grad m sich als die *Gauss*'sche φ-Funktion der Zahl μ bestimmt

(52) $$m = \varphi(\mu).$$

Könnte nun $m < 4$ also z. B. gleich 3 sein, so müsste $\varphi(\mu) = 3$ sein, was unmöglich ist*), woraus weiter folgen würde

$$m = \varphi(\mu) \leqq 2. \tag{53}$$

In diesem Falle genügte ε einer quadratischen, ganzzahligen Gleichung und wäre somit rational, ein Fall, der eine Reduktion der Anzahl der im Integralelement (35) vorkommenden Logarithmen nach sich ziehen würde und daher einfach auszuschliessen ist. Wir finden: *Ist die Anzahl der im Integralelement auftretenden Logarithmen* $\varrho = 3$, *so bestimmt sich* μ *aus der Gleichung*

$$\varphi(\mu) = 4. \tag{54}$$

Um die Lösungen zu finden, beachten wir, dass

$$\varphi(\mu) = \mu \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \cdots = 4,$$

wenn $a, b, c, \ldots$ die in μ enthaltenen Primzahlen bedeuten.

$$\frac{\mu}{a \cdot b \cdot c \ldots} = \frac{4}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot (c-1) \ldots} = \text{ganzzahlig},$$

woraus sich für μ leicht die Form ergiebt

$$\mu = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma, \tag{55}$$

wo α, β, γ ganze Zahlen — Null eingeschlossen — bedeuten.

Um die Werte für die Exponenten zu ermitteln, beachten wir, dass sich $\varphi(\mu)$ auch schreiben lässt

---

*) Dass $\varphi(\mu)$ nicht den Wert 3 haben kann, erkennt man direkt durch Anschreiben einiger $\varphi(\mu)$-Werte unter gleichzeitiger Beachtung, dass $\varphi(\mu)$ mit wachsendem μ selbst wächst; aber auch zahlentheoretisch, wie folgt

$$\varphi(\mu) = \mu \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdots,$$

wenn die in μ enthaltenen Primzahlen mit $a, b, \ldots$ bezeichnet werden. Wäre $\varphi(\mu) = 3$, so folgt $\frac{\mu}{a \cdot b \ldots} = \frac{3}{(a-1) \cdot (b-1) \ldots}$ = einer ganzen Zahl, woraus die Möglichkeiten entstehen

$$\begin{array}{l|l} a-1=1 & b-1=3 \\ a-1=3 & b-1=1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l|l} a=2 & b=4 \\ a=4 & b=2. \end{array}$$

Es müsste also $\mu = 2$ oder eine Potenz von 2 sein. Bestimmt man jetzt hiervon $\varphi(\mu)$, so zeigt sich, dass $\varphi(\mu)$ nicht $= 3$ sein kann.

$$\varphi(\mu) = (a - 1)\, a^{\alpha-1} \,.\, (b - 1)\, b^{\beta-1} \,.\, (c - 1)\, c^{\gamma-1}$$

oder

(56) $$\varphi(\mu) = (2^{\alpha-1}) \,.\, (2 \,.\, 3^{\beta-1}) \,.\, (4 \,.\, 5^{\gamma-1}) = 4\,,$$

woraus folgt

(57) $$\alpha \leq 3, \quad \beta \leq 1, \quad \gamma \leq 1.$$

Für den Fall, dass $\alpha = 3$ und weiter

$$\varphi(\mu) = 2^3\, 3^\beta\, 5^\gamma$$

ist, folgt aus

$$\varphi(\mu) = 2^2 \,.\, (2 \,.\, 3^{\beta-1}) \,.\, (4 \,.\, 5^{\gamma-1}) = 4\,,$$

dass die Zahlen 3 und 4 in μ nicht enthalten sein können, also ist

$$\mu = 2^3 = 8\,.$$

Ist $\alpha = 2$ und $\mu = 2^2\, 3^\beta\, 5^\gamma$, so ergiebt sich aus

$$\varphi(\mu) = 2 \,.\, (2 \,.\, 3^{\beta-1}) \,.\, (4 \,.\, 5^{\gamma-1}) = 4\,,$$

dass $\beta = 1$ und $\gamma = 0$ und somit

$$\mu = 2^2 \,.\, 3 = 12.$$

Wenn $\alpha = 1$ und $\mu = 2 \,.\, 3^\beta \,.\, 5^\gamma$ ist, so lehrt

$$\varphi(\mu) = (2 \,.\, 3^{\beta-1}) \,.\, (4 \,.\, 5^{\gamma-1}) = 4,$$

dass $\beta = 0,\ \gamma = 1$

d. h. $$\mu = 2 \,.\, 5 = 10.$$

Ist endlich $\alpha = 0$ und $\mu = 3^\beta\, 5^\gamma$, so ist

$$\varphi(\mu) = (2 \,.\, 3^{\beta-1}) \,.\, (4 \,.\, 5^{\gamma-1}) = 4\,,$$

und folglich $\beta = 0,\ \ \gamma = 1,$ also

$$\mu = 5\,.$$

D. h. die Gleichung

$$\varphi(\mu) = 4$$

hat die Lösungen

(58) $$\mu = 5,\ 8,\ 10,\ 12.$$

Hat das lineare, nicht homogene Differentialgleichungssystem (1) *ein Integralelement der Form*

$$z_1 = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + A_3 \log v_3\,,$$

so muss unter den bekannten Bedingungen μ die Werte 5, 8, 10, 12 *besitzen, und nur in diesem Falle kann für* (1) *ein aus drei Logarithmen linear zusammengesetztes Integralelement existieren.*

$\varrho = 4.$

Es besitze das Differentialgleichungssystem (1)

$$(59)\qquad \frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_1^n{}^\beta Y_{\alpha\beta} z_\beta + y_\alpha; \qquad \alpha = |_1^n$$

ein Integralsystem, in welchem ein Element — also im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente — sich linear aus 4 Logarithmen algebraischer Funktionen zusammensetzt

$$(60)\ z_1 = \sum_1^4{}^i A_i \log v_i = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + A_3 \log v_3 + A_4 \log v_4 .$$

Um die Werte von μ zu ermitteln, welches im Grade der Definitionsgleichung von y vorkommt, lassen wir x solche geschlossenen Umläufe machen, dass y in εy übergeht, während die andern Coefficienten $Y_{11}, \ldots Y_{nn}$ in (1) intakt bleiben; dann erfüllt, wenn wir die frühere Bezeichnungsweise beibehalten,

$$(61)\qquad z_1^{(1)} = \sum_1^4{}^i A_i \log v_i^{(1)}$$

mit den entsprechenden Werten der ergänzenden Elemente die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(1)}}{dx} = \sum_1^n{}^\beta Y_{1\beta}\, z_\beta^{(1)} + \varepsilon y_1 ,$$

und folglich muss

$$(62)\qquad \zeta_1^{(1)} = z_1 - \varepsilon z_1$$

ein Integralelement des reducierten Systems sein. Wegen der für das letztere gemachten Annahme muss sich $\zeta_1^{(1)}$ als eine Constante, die wir mit $w_1^{(1)}$ bezeichnen wollen, ergeben

$$(63)\quad \zeta_1^{(1)} = z_1^{(1)} - \varepsilon z_1 = \sum_1^4{}^i A_i (\log v_i^{(1)} - \varepsilon \log v_i) = w^{(1)}.$$

Fassen wir hierin $v_i^{(1)}$, v_1, v_2, v_3 als algebraische Funktionen von v_4 auf, so ergiebt sich, wenn v_4 so oft den Nullpunkt umkreist, bis jene Funktionen ihren Ausgangswert wieder annehmen, eine Gleichung, welche, um die letzte Gleichung (63) vermindert, zu der Relation

(64) $$\sum_1^4 {}^i A_i (K_i - \varepsilon k_i) = 0$$

führt, worin die ganzen Zahlen K_i, k_i die Coefficienten der Multipla von $2\pi i$ bedeuten, um welche bei den obigen Umkreisungen die Logarithmen zugenommen haben. Aus (64) ergiebt sich

(65) $$A_4 = -A_1 \frac{K_1 - \varepsilon k_1}{K_4 - \varepsilon k_4} - A_2 \frac{K_2 - \varepsilon k_2}{K_4 - \varepsilon k_4} - A_3 \frac{K_3 - \varepsilon k_3}{K_4 - \varepsilon k_4}$$

oder kurz

(66) $$A_4 = -A_1 \frac{a_1}{a_4} - A_2 \frac{a_2}{a_4} - A_3 \frac{a_3}{a_4},$$

wenn zur Abkürzung

(67) $$K_i - \varepsilon k_i = a_i$$

gesetzt wird.

Das Integralelement (60) nimmt nun die Form an

(68) $$z_1 = \sum_1^3 {}^i A_i \left\{ \log v_i - \frac{a_i}{a_4} \log v_4 \right\}.$$

Behufs Elimination eines ferneren Coefficienten lassen wir x solche geschlossenen Umläufe machen, dass y in $\varepsilon^2 y$ übergeht, während die andern Coefficienten des Systems (1) ungeändert bleiben; dann erfüllt, wenn die durch die Substitution $\left(\begin{smallmatrix} y \\ \varepsilon^2 y \end{smallmatrix}\right)$ entstehenden Veränderungen durch den oberen Index $^{(2)}$ bezeichnet werden,

(69) $$z_1^{(2)} = \sum_1^3 {}^i A_i \left\{ \log v_1^{(2)} - \frac{a_i}{a_4} \log v_4^{(2)} \right\}$$

mit den ergänzenden Elementen dieses Integralsystems die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(2)}}{dx} = \sum_2^n {}^\beta Y_{1\beta}\, z_\beta^{(2)} + \varepsilon^2 y,$$

woraus folgt, dass

(70) $$\zeta_1^{(2)} = z_1^{(2)} - \varepsilon^2 z_1$$

ein Integralelement des reducierten Systems und daher gemäss der gemachten Annahme gleich einer Constanten $w^{(2)}$ sein muss

$$(71)\ \zeta_1^{(2)} = \sum_1^3 A_i \left\{ \log v_i^{(2)} - \varepsilon^2 \log v_i - \frac{a_i}{a_4} \log v_4^{(2)} + \frac{a_i}{a_4} \varepsilon^2 \log v_4 \right\} = w^{(2)}.$$

Fassen wir in dieser Gleichung wieder v_4 als die Variabele und $v_i^{(2)}$, v_1, v_2, v_3 als algebraische Funktionen von v_4 auf, so können wir v_4 so oft den Nullpunkt umkreisen lassen, bis die genannten Funktionen zu ihrem Ausgangswert zurückkehren. Nimmt hierbei log $v_i^{(2)}$ um $L_i 2\pi i$ zu, so ergiebt sich die Gleichung

$$(72)\qquad \sum_1^3 A_i \left\{ L_i - \varepsilon^2 k_i - \frac{a_i}{a_4} L_4 + \frac{a_i}{a_4} \varepsilon^2 k_4 \right\} = 0,$$

oder wenn der Nenner fortgeschafft und nach ε geordnet wird,

$$(73)\begin{cases} A_1 \{ \varepsilon^2(K_1 k_4 - k_1 K_4) + \varepsilon(k_1 L_4 - L_1 k_4) + (L_1 K_4 - K_1 L_4) \} \\ + A_2 \{ \varepsilon^2(K_2 k_4 - k_2 K_4) + \varepsilon(k_2 L_4 - L_2 k_4) + (L_2 K_4 - K_2 L_4) \} \\ + A_3 \{ \varepsilon^2(K_3 k_4 - k_3 K_4) + \varepsilon(k_3 L_4 - L_3 k_4) + (L_3 K_4 - K_3 L_4) \} = 0, \end{cases}$$

oder wenn für die Klammern kurz b_{i4} gesetzt wird,

$$A_1 b_{14} + A_2 b_{24} + A_3 b_{34} = 0,$$

woraus folgt

$$A_3 = - A_1 \frac{b_{14}}{b_{34}} - A_2 \frac{b_{24}}{b_{34}},$$

wodurch das Integralelement (68) die Form annimmt

$$z_1 = A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{a_1}{a_4} \log v_4 - \frac{b_{14}}{b_{34}} \log v_3 + \frac{a_3}{a_4} \frac{b_{14}}{b_{34}} \log v_4 \right\}$$
$$+ A_2 \left\{ \log v_2 - \frac{a_2}{a_4} \log v_4 - \frac{b_{24}}{b_{34}} \log v_3 + \frac{a_3}{a_4} \frac{b_{24}}{b_{34}} \log v_4 \right\}$$

oder

$$(74)\quad \begin{cases} z_1 = A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{b_{14}}{b_{34}} \log v_3 + \left(\frac{a_3}{a_4} \frac{b_{14}}{b_{34}} - \frac{a_1}{a_4} \right) \log v_4 \right\} \\ \quad + A_2 \left\{ \log v_2 - \frac{b_{24}}{b_{34}} \log v_3 + \left(\frac{a_3}{a_4} \frac{b_{24}}{b_{34}} - \frac{a_2}{a_4} \right) \log v_4 \right\}. \end{cases}$$

Um nun A_2 zu eliminieren, lassen wir x solche geschlossenen Umläufe machen, dass y in $\varepsilon^3 y$ übergeht, während die übrigen Coefficienten des Systems (1) ungeändert bleiben. Dann erfüllt, wenn die durch die Substitution $\begin{pmatrix} y \\ \varepsilon^3 y \end{pmatrix}$ hervorgerufenen Veränderungen durch den oberen Index $^{(3)}$ bezeichnet

werden, $z_1^{(3)}$ mit den ergänzenden Elementen des Integralsystems die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(3)}}{dx} = \sum_1^n{}^\beta Y_{1\beta} z_\beta^{(3)} + \varepsilon^3 y_1 ,$$

und somit

(75) $$\zeta_1^{(3)} = z_1^{(3)} - \varepsilon^3 z_1$$

die Gleichung

$$\frac{dz_1^{3}}{dx} = \sum_1^n{}^\beta Y_{1\beta} z_\beta^{(3)},$$

woraus folgt, dass $\zeta_1^{(3)}$ gleich einer Constanten $w^{(3)}$ sein muss

(76) $$\left\{\begin{aligned} & A_1 \Big\{\log v_1^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_1 - \frac{b_{14}}{b_{34}}\Big(\log v_3^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_3\Big) \\ & \qquad + \Big(\frac{a_3}{a_4}\frac{b_{14}}{b_{34}} - \frac{a_1}{a_4}\Big)\Big(\log v_4^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_4\Big)\Big\} \\ & + A_2 \Big\{\log v_2^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_2 - \frac{b_{24}}{b_{34}}\Big(\log v_3^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_3\Big) \\ & \qquad + \Big(\frac{a_3}{a_4}\frac{b_{24}}{b_{34}} - \frac{a_2}{a_4}\Big)\Big(\log v_4^{(3)} - \varepsilon^3 \log v_4\Big)\Big\} = w^{(3)}. \end{aligned}\right.$$

Betrachten wir in dieser Gleichung $v_i^{(3)}$, v_1, v_2, v_3 als algebraische Funktionen von v_4, und lassen wir v_4 so oft den Nullpunkt umkreisen, bis die genannten Funktionen zu ihrem Ausgangswerte zurückkehren, — die Anzahl der hierzu erforderlichen Umkreisungen wird mit Berücksichtigung des oben S. 21 Gesagten so gross sein, dass nunmehr v_1, v_2, v_3, $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$, $v_i^{(3)}$ zu ihrem Ausgangswerte zurückkehren, und diese Anzahl von Umkreisungen haben wir uns schon oben ausgeführt zu denken, damit die k_i-Grössen hier wie oben denselben Wert haben — so ergiebt sich, wenn $\log v_i^{(3)}$ um $M_i\, 2\pi i$ zunimmt, folgende Relation, die in ε scheinbar vom 6ten Grade ist

$$\begin{aligned} & A_1 \Big\{M_1 - \varepsilon^3 k_1 - \frac{b_{14}}{b_{34}}\Big(M_3 - \varepsilon^3 k_3\Big) + \Big(\frac{a_3}{a_4}\frac{b_{14}}{b_{34}} - \frac{a_1}{a_4}\Big)\Big(M_4 - \varepsilon^3 k_4\Big)\Big\} \\ & + A_2 \Big\{M_2 - \varepsilon^3 k_2 - \frac{b_{24}}{b_{34}}\Big(M_3 - \varepsilon^3 k_3\Big) + \Big(\frac{a_3}{a_4}\frac{b_{24}}{b_{34}} - \frac{a_2}{a_4}\Big)\Big(M_4 - \varepsilon^3 k_4\Big)\Big\} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$(77) \left\{\begin{aligned} & A_1 \{ M_1 a_4 b_{34} - M_3 a_4 b_{14} + M_4 (a_3 b_{14} - a_1 b_{34}) \\ & \qquad - \varepsilon^3 b_{34}(K_4 k_1 - K_1 k_4) + \varepsilon^3 b_{14}(K_4 k_3 - K_3 k_4) \} \\ & + A_2 \{ M_2 a_4 b_{34} - M_3 a_4 b_{24} + M_4 (a_3 b_{24} - a_2 b_{34}) \\ & \qquad - \varepsilon^3 b_{34}(K_4 k_2 - K_2 k_4) + \varepsilon^3 b_{24}(K_4 k_3 - K_3 k_4) \} = 0, \end{aligned}\right.$$

oder wenn die Klammern kurz mit c_{14} und c_{24} bezeichnet werden,

$$(78) \qquad A_1 c_{14} + A_2 c_{24} = 0,$$

woraus folgt

$$(79) \qquad A_2 = - A_1 \frac{c_{14}}{c_{24}},$$

so dass das Integralelement (74) die Form annimmt

$$(80) \left\{\begin{aligned} z_1 = A_1 \Big\{ & \log v_1 - \frac{c_{14}}{c_{24}} \log v_2 + \left(\frac{b_{24}}{b_{34}} \frac{c_{14}}{c_{24}} - \frac{b_{14}}{b_{34}}\right) \log v_3 \\ & + \left(\frac{a_3}{a_4} \frac{b_{14}}{b_{34}} - \frac{a_1}{a_4} - \frac{c_{14}}{c_{24}} \frac{a_3}{a_4} \frac{b_{24}}{b_{34}} + \frac{a_2}{a_4} \frac{c_{14}}{c_{24}}\right) \log v_4 \Big\}. \end{aligned}\right.$$

Um aus dieser Integralform, die nur noch die eine Constante A_1 enthält, die gesuchte Gleichung für ε herzuleiten, lassen wir x solche geschlossenen Umläufe machen, dass y in $\varepsilon^4 y$ übergeht — wobei also die Annahme gemacht werden muss, dass $\mu \geqq 4$ ist —, dann erfüllt, wenn wir in der früheren Bezeichnungsweise fortfahren, $z_1^{(4)}$ mit den ergänzenden Elementen des Integralsystems die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(4)}}{dx} = \sum_1^n {}^\beta\, Y_{1\beta}\, z_\beta^{(4)} + \varepsilon^4 \mathfrak{y}_1$$

und

$$(81) \qquad \zeta_1^{(4)} = z_1^{(4)} - \varepsilon^4 z_1 = w^{(4)}$$

die Gleichung

$$\frac{dz_1^{(4)}}{dx} = \sum_1^n {}^\beta\, Y_{1\beta}\, z_\beta^{(4)},$$

woraus dann weiter folgt, dass $w^{(4)}$ eine Constante sein muss.

Fassen wir endlich in der Gleichung (81) die Grössen $v_i^{(4)}, v_1, v_2, v_3$ als algebraische Funktionen von v_4 auf, so können wir v_4 so oft den Nullpunkt umkreisen lassen, bis jene Funktionen zu ihrem Ausgangswerte zurückkehren, wo-

bei $\log v_i^{(4)}$ um $N_i\, 2\pi i$ zunehmen mag*). Wenn dann von der so entstehenden Gleichung die Gleichung (81) subtrahiert wird, so folgt, indem wir gleichzeitig durch $A_1 2\pi i$ dividieren, die Relation

$$N_1 - \varepsilon^4 k_1 - \frac{c_{14}}{c_{24}}\left(N_2 - \varepsilon^4 k_2\right) + \left(\frac{b_{24}}{b_{34}}\frac{c_{14}}{c_{24}} - \frac{b_{14}}{b_{34}}\right)\left(N_3 - \varepsilon^4 k_3\right)$$
$$+ \left(\frac{a_3}{a_4}\frac{b_{14}}{b_{34}} - \frac{a_1}{a_4} - \frac{c_{14}}{c_{24}}\frac{a_3}{a_4}\frac{b_{24}}{b_{34}} + \frac{a_2}{a_4}\frac{c_{14}}{c_{24}}\right)\left(N_4 - \varepsilon^4 k_4\right) = 0$$

oder

$$(82)\left\{\begin{aligned} & c_{24}\left\{\begin{aligned} & a_4 b_{34} N_1 - \varepsilon^4 k_1 a_4 b_{34} - a_4 b_{14} N_3 + \varepsilon^4 k_3 a_4 b_{14} \\ & + a_3 b_{14} N_4 - \varepsilon^4 k_4 a_3 b_{14} - a_1 b_{34} N_4 + \varepsilon^4 k_4 a_1 b_{34} \end{aligned}\right\} \\ & + c_{14}\left\{\begin{aligned} & - a_4 b_{34} N_2 + \varepsilon^4 k_2 a_4 b_{34} + a_4 b_{24} N_3 - \varepsilon^4 k_3 a_4 b_{24} \\ & - a_3 b_{24} N_4 + \varepsilon^4 k_4 a_3 b_{24} + a_2 b_{34} N_4 - \varepsilon^4 k_4 a_2 b_{34} \end{aligned}\right\} = 0, \end{aligned}\right.$$

oder indem wir für c_{14}, c_{24} ihre Werte einsetzen,

$$(83)\left\{\begin{aligned} & \left\{\begin{aligned} & a_4 b_{34} M_2 - a_4 b_{24} M_3 + (a_3 b_{24} - a_2 b_{34}) M_4 \\ & - (K_4 k_2 - K_2 k_4) b_{34} \varepsilon^3 + (K_4 k_3 - K_3 k_4) b_{24} \varepsilon^3 \end{aligned}\right\} \times \\ & \left\{\begin{aligned} & a_4 b_{34} N_1 - a_4 b_{34} k_1 \varepsilon^4 - a_4 b_{14} N_3 + a_4 b_{14} k_4 \varepsilon^4 \\ & + a_3 b_{14} N_4 - a_3 b_{14} k_4 \varepsilon^4 - a_1 b_{34} N_4 + a_1 b_{34} k_4 \varepsilon^4 \end{aligned}\right\} \\ & + \left\{\begin{aligned} & a_4 b_{34} M_1 - a_4 b_{14} M_3 + (a_3 b_{14} - a_1 b_{34}) M_4 \\ & - (K_4 k_1 - K_1 k_4) b_{34} \varepsilon^3 + (K_4 k_3 - K_3 k_4) b_{14} \varepsilon^3 \end{aligned}\right\} \times \\ & \left\{\begin{aligned} & - a_4 b_{34} N_2 + a_4 b_{34} k_2 \varepsilon^4 + a_4 b_{24} N_3 - a_4 b_{24} k_3 \varepsilon^4 \\ & - a_3 b_{24} N_4 + a_3 b_{24} k_4 \varepsilon^4 + a_2 b_{34} N_4 - a_2 b_{34} k_4 \varepsilon^4 \end{aligned}\right\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Um in der späteren Rechnung die Teile der Gleichung leichter nennen zu können, seien für die Klammern bez. I, I′, II, II′ gesetzt, so dass in diesen Zeichen die Gleichung lautet

$$(84) \qquad \mathrm{I} \,.\, \mathrm{I}' + \mathrm{II} \,.\, \mathrm{II}' = 0.$$

Damit haben wir für die μ^{te} primitive Einheitswurzel ε eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten erhalten, aus der

---

*) Zurückgreifend und zusammenfassend können wir nunmehr sagen: wir denken uns jedesmal, so oft der hier vorliegende Schluss gemacht wird, dass v_4 so oft den Nullpunkt umkreist, bis v_1, v_2, v_3, $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$, $v_i^{(3)}$, $v_i^{(4)}$ zu ihren Ausgangswerten zurückkehren. Die Anzahl dieser Umkreisungen genügt in jedem Falle.

sich jetzt leicht die Werte für μ ergeben. Zunächst erkennt man, dass die Gleichung vom 12ten Grade ist, und es mag bemerkt sein, dass wenn wir S. 34 bei Aufstellung der Gleichung (77) nicht schon eine Vereinfachung vollzogen hätten, hier eine Gleichung 13ten Grades aufgetreten wäre, von der wir aber sofort (vgl. S. 28) hätten sagen können, dass das Glied mit ε^{13} wegfallen muss, weil für $\varphi(\mu)$ der Wert 13 unmöglich ist*). Der Grad der Gleichung ist daher eine der Zahlen aus der Reihe 1 bis 12, von denen jedoch die Zahlen 11, 9, 7, 5, 3, 2, 1 zu streichen sind (Eigenschaft der φ-Funktion, Annahme S. 34).

Wir werden nun sehen, dass die Gleichung vom 8ten Grade ist. Bei dem Nachweise der Reduktion der Gleichung brauchen wir uns nur mit dem Produkt I . I′ zu beschäftigen, denn was von I . I′ gilt, gilt wegen der symmetrischen Form auch von II . II′.

Fassen wir zunächst das Glied mit ε^{12} auf; dasselbe rührt her aus der Multiplication des Gliedes mit ε^5 in I mit dem Gliede ε^7 in I′.

Aber der Coefficient von ε^5 in I lautet

$$\varepsilon^5 \text{ in I} \;\|\; -(K_4 k_2 - K_2 k_4)(K_3 k_4 - K_4 k_3) + (K_4 k_3 - K_3 k_4)(K_2 k_4 - K_4 k_2) = 0 .$$

Der Coefficient von ε^{11} muss, wie schon oben bemerkt, verschwinden, weil $\varphi(\mu)$ nicht den Wert 11 annehmen kann. Das Glied mit ε^{10} rührt aus folgenden Zusammenstellungen her

I	I′	
ε^3	ε^7	(verschwindet)
ε^4	ε^6	(verschwindet)
ε^5	ε^5	(verschwindet).

$$\varepsilon^7 \text{ in I}' \;\|\; (K_3 k_4 - K_4 k_3)(k_4 k_1 - k_4 k_1) + (K_1 k_4 - K_4 k_1)(k_4 k_1 - k_4 k_1) = 0 .$$

*) In der jetzigen Form besitzt die Gleichung 1572 Glieder, ohne jene Vereinfachung hätte sie 2028 Glieder gehabt.

$$\varepsilon^6 \text{ in I}' \,\|\, -K_4 k_1 (K_3 k_4 - K_4 k_3) + k_1 k_4 (L_4 k_3 - k_4 L_3)$$
$$+ K_4 k_3 (K_1 k_4 - K_4 k_1) - k_3 k_4 (L_4 k_1 - k_4 L_1)$$
$$- K_3 k_4 (K_1 k_4 - K_4 k_1) + k_3 k_4 (L_4 k_1 - k_4 L_1)$$
$$+ K_1 k_4 (K_3 k_4 - K_4 k_3) - k_1 k_4 (L_4 k_3 - k_4 L_3)$$
$$= (K_3 k_4 - K_4 k_3)(K_1 k_4 - K_4 k_1)$$
$$+ (K_1 k_4 - K_4 k_1)(K_4 k_3 - K_3 k_4) = 0.$$

ε^5 in I ‖ verschwindet s. oben.

Der Coefficient von ε^9 muss wieder selbstverständlich verschwinden. Untersuchen wir das Glied mit ε^8. Dasselbe rührt aus folgenden Zusammenstellungen her

I	I′	
ε	ε^7	(verschwindet)
ε^2	ε^6	(verschwindet)
ε^3	ε^5	(verschwindet nicht)
ε^4	ε^4	(verschwindet)
ε^5	ε^3	(verschwindet),

von denen wir die dritte zuletzt betrachten wollen.

ε^7 in I′ ‖ verschwindet s. oben

ε^6 in I′ ‖ verschwindet s. oben

$$\varepsilon^4 \text{ in I} \,\|\, -(k_2 K_4 - K_2 k_4)(k_4 K_3 - k_3 K_4)$$
$$+ (k_3 K_4 - K_3 k_4)(K_2 k_4 - K_4 k_2) = 0$$

ε^5 in I ‖ verschwindet s. oben.

In der Zusammenstellung ε^3 aus I und ε^5 aus I′ kann der Coefficient des zuerst genannten Gliedes im allgemeinen nicht verschwinden; der des zuletzt genannten Gliedes lautet

$$\varepsilon^5 \text{ in I}' \,\|\, k_1 k_4 (L_3 K_4 - K_3 L_4) - k_1 K_4 (k_3 L_4 - L_3 k_4)$$
$$- k_3 k_4 (L_1 K_4 - K_1 L_4) + k_3 K_4 (k_1 L_4 - L_1 k_4)$$
$$+ k_3 k_4 (L_1 K_4 - K_1 L_4) - K_3 k_4 (k_1 L_4 - L_1 k_4)$$
$$- k_1 k_4 (L_3 K_4 - K_3 L_4) + K_1 k_4 (k_3 L_4 - L_3 k_4)$$
$$= (K_1 k_4 - k_1 K_4)(k_3 L_4 - L_3 k_4)$$
$$+ (k_3 K_4 - K_3 k_4)(k_1 L_4 - L_1 k_4).$$

Der erhaltene Ausdruck wird im allgemeinen nicht ver-

schwinden, da er sonst eine Relation zwischen den in ihm enthaltenen Grössen ausdrücken würde*). Somit wird im allgemeinen die obige Gleichung für ε vom 8ten Grade sein, so dass sich μ aus der Gleichung

$$(85) \qquad \varphi(\mu) = 8$$

bestimmt.

Bedeuten $a, b, c, d, \ldots$ die in μ enthaltenen Primzahlen, hat also μ die Form

$$(86) \qquad \mu = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots,$$

so dass

$$\varphi(\mu) = \mu \,.\, \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \cdot \frac{d-1}{d} \cdots = 8$$

ist, so ergiebt sich aus

$$\frac{\mu}{a\,.\,b\,.\,c\,.\,d \ldots} = \frac{8}{(a-1)\,.\,(b-1)\,.\,(c-1)\,.\,(d-1)\ldots} = \text{ganzzahlig}$$

$$(87) \qquad \alpha = 2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma\, 9^\delta,$$

woraus sich mit Beachtung der Gleichung

$$(88) \left\{ \begin{aligned} \varphi(\mu) &= (a^{\alpha-1}(a-1))(b^{\beta-1}(b-1))(c^{\gamma-1}(c-1))(d^{\delta-1}(d-1)) \\ &= (2^{\alpha-1})(3^{\beta-1}.2)(5^{\gamma-1}.4)(9^{\delta-1}.8) = 8 \end{aligned} \right.$$

folgende Zusammenstellungen herleiten

I	$a=2, \alpha=4$	—	—	—	$\mu = 2^4$	$= 8$
II	$a=2, \alpha=3$	$b=3, \beta=1$	—	—	$\mu = 2^3.3$	$= 24$
III	$a=2, \alpha=2$	—	$c=5, \gamma=1$	—	$\mu = 2^2.5$	$= 20$
IV	$a=2, \alpha=1$	$b=3, \beta=1$	$c=5, \gamma=1$	—	$\mu = 2.3.5$	$= 30$
V	$a=2, \alpha=1$	—	—	$d=9, \delta=1$	$\mu = 2.9$	$= 18$
VI	—	$b=3, \beta=1$	$c=5, \gamma=1$	—	$\mu = 3.5$	$= 15$
VII	—	—	—	$d=9, \delta=1$	$\mu = 9$	$= 9.$

*) Wir haben oben aus der Eigenschaft der φ-Funktion auf das Nullwerden der Glieder mit ε^{11} und ε^9 geschlossen. Würden diese Glieder nicht identisch verschwinden, so würden ihre Coefficienten — da sie nach der Eigenschaft der φ-Funktion doch Null sein müssen — zu Relationen zwischen den k-, K-, L-Grössen führen, Relationen, die dann vielleicht Schlüsse für den Coefficienten von ε^5 in I′ erlauben würden. Aber man erkennt unmittelbar, genau wie oben, dass der Coefficient von ε^{11} und ε^9 identisch verschwindet.

Also:

(89) $$\mu = 8, 9, 15, 18, 20, 24, 30.$$

Wir finden:

Setzt sich ein Element eines Integralsystems — also im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente desselben — für das Differentialgleichungssystem (1)

$$\frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_1^n {}^\beta\, Y_{\alpha\beta}\, z_\beta + y_\alpha, \quad \alpha = |_1^n,$$

worin $y_\alpha = r_\alpha y$ *ist und* y *durch eine Gleichung von der Form*

$$y^{\delta\mu} + \varphi_1(x, Y_{11}, \ldots Y_{nn})\, y^{(\delta-1)\mu} + \varphi_2\, y^{(\delta-2)\mu} + \cdots + \varphi_\delta = 0$$

definiert ist, linear aus vier Logarithmen zusammen

$$z_1 = \sum_1^4 {}^i\, A_i \log v_i,$$

so muss unter den oben genannten Bedingungen μ *einen der Werte besitzen*

$$\mu = 8, 9, 15, 18, 20, 24, 30,$$

und nur in diesem Falle kann ein Integralelement der obigen Form existieren.

In ganz derselben Weise behandelte ich noch den Fall $\varrho = 5$. Es ergab sich für ε eine ganzzahlige Gleichung 16ten Grades, so dass sich μ aus der Gleichung

(90) $$\varphi(\mu) = 16$$

bestimmte. Die Lösungen sind

(91) $$\mu = 17, 27, 32, 34, 36, 40, 48, 54, 60.$$

Die gewonnenen Resultate lassen sich in nachstehender Weise übersichtlich zusammenstellen:

ϱ	$\varphi(\mu)$
1	$1 = 2^0 = 2^{1-1}$
2	$2 = 2^1 = 2^{2-1}$
3	$4 = 2^2 = 2^{3-1}$
4	$8 = 2^3 = 2^{4-1}$
5	$16 = 2^4 = 2^{5-1}$,

woraus sich der folgende Zusammenhang zwischen ϱ und μ ergiebt:

Ist die Anzahl der im Integral auftretenden Logarithmen ϱ, so bestimmt sich μ aus der Gleichung

$$\varphi(\mu) = 2^{\varrho-1}. \tag{92}$$

Diese Gleichung hat bis jetzt nur für $\varrho \leq 5$ Gültigkeit, da sie nur bis zu diesem Grenzwerte bewiesen ist. Sollte es gelingen, die Berechtigung der Anwendung des Schlusses „von n auf $n+1$" zu beweisen, so würde der Satz allgemein gelten, und wir finden unter diesem Vorbehalt dann den folgenden Satz:

Hat das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_1^n{}^\beta Y_{\alpha\beta}\, z_\beta = y_\alpha; \quad \alpha = |_1^n,$$

worin $y_\alpha = r_\alpha y$, r_α eine rationale Funktion von $Y_{11}, \dots Y_{nn}$, und y durch eine Gleichung von der Form

$$y^{\delta\mu} + \varphi_1(x, Y_{11}, \dots Y_{nn})\, y^{(\delta-1)\mu} + \cdots + \varphi_\delta(x, Y_{11}, \dots Y_{nn}) = 0$$

definiert ist, ein Integralelement, das sich linear aus ϱ Logarithmen zusammensetzt

$$z_1 = \sum_1^\varrho{}^i A_i \log v_i,$$

— woraus dann im allgemeinen ein ähnlicher linearer Ausdruck für die ergänzenden Elemente des simultanen Integralsystems folgt, — so besteht, falls das zugehörige reducierte Differentialgleichungssystem keine logarithmischen Integrale besitzt, zwischen ϱ und μ der Zusammenhang

$$\varphi(\mu) = 2^{\varrho-1},$$

wo $\varphi(\mu)$ die Gauss'sche φ-Funktion der Zahl μ bedeutet.



Logarithmische Integrale, in denen die Coefficienten algebraische Funktionen sind.

Wir haben uns bis jetzt mit Integralen von der Form

$$z_1 = A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho$$

beschäftigt, wobei die Coefficienten der Logarithmen constante Grössen waren. Lassen wir jetzt diese Beschränkung fallen*), und wenden wir uns zu simultanen Integralsystemen, in welchen ein Element die Form hat

$$z_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \cdots + u_\varrho \log v_\varrho,$$

worin die u- und v-Grössen algebraische Funktionen sind, definiert durch algebraische, mit Adjungierung der Coefficienten $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha$ des Differentialgleichungssystems irreduktible Gleichungen.

Für den Fall, dass die Coefficienten der Logarithmen algebraisch rationale, also eindeutige Funktionen der genannten Grössen sind, lässt sich genau wie im Falle der constanten Coefficienten zeigen, dass dann auch noch ein anderes Integralelement existieren muss, in welchem die Logarithmanden sich rational durch die Coefficienten des vorgelegten Differentialgleichungssystems ausdrücken lassen**).

Machen wir aber die eben erwähnte Annahme nicht, habe also ein Element — und somit im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente — eines Integralsystems die obige Form, worin die u- und v-Grössen algebraische Funktionen sind, definiert durch algebraische, mit Adjungierung der Coefficienten des vorgelegten Systems irreduktible Gleichungen, so entsteht die Frage: „Welches ist in diesem Falle die Form der algebraischen Funktionen u und v?“

Diese Frage soll im Folgenden für einige Werte von ϱ gelöst werden.

*) Ebenso werden wir auch bald die den Grössen y_α auferlegte Beschränkung fallen lassen.

**) *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 300.



$\varrho = 1.$

Es sei wieder das bekannte Differentialgleichungssystem vorgelegt

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = Y_{11} z_1 + Y_{12} z_2 + \cdots + Y_{1n} z_n + y_1 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = Y_{21} z_1 + Y_{22} z_2 + \cdots + Y_{2n} z_n + y_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dz_n}{dx} = Y_{n1} z_1 + Y_{n2} z_2 + \cdots + Y_{nn} z_n + y_n , \end{cases}$$

worin x die unabhängige, $z_1, z_2, \ldots z_n$ die abhängigen Variabelen bedeuten und — indem wir jetzt auch die früher für die Grössen y_α eingeführte Bedingung fallen lassen — $Y_{11}, \ldots Y_{nn}, y_1, \ldots y_n$ algebraische irreduktible Funktionen von x sind. Es besitze (1) ein Element eines simultanen Integralsystems, das sich — also im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente — linear aus einem Logarithmus zusammensetzt, also die Form hat

$$(2)\qquad z_1 = u + u_1 \log v_1 ,$$

worin u, u_1, v_1 algebraische Funktionen, definiert durch algebraische, mit Adjungierung von $x, Y_{11}, \ldots Y_{nn}, y_1, \ldots y_n$ irreduktible Gleichungen, bedeuten. Nach dem *Abel*'schen Satz*) können wir uns dann die Grössen u, u_1, v_1 rational durch eine andre algebraische Funktion t_1 ausgedrückt denken, wo t_1 durch eine mit Adjungierung der Coefficienten in (1) ebenfalls irreduktible Gleichung

$$(3)\quad t^\delta + \varphi_1 (x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) t^{\delta-1} + \cdots + \varphi_\delta (x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) = 0$$

definiert ist. Sind die δ Lösungen der Gleichung (3) $t_1, t_2, \ldots t_\delta$, so können wir nach dem *Koenigsberger*'schen Satz**) x solche geschlossenen Umläufe machen lassen, welche t_1 in eine andre Lösung, etwa t_2 überführen, während die Coefficienten des Systems (1) ungeändert bleiben. Entspricht diesem t-Werte die Zusammenstellung

---

*) S. 4.
**) S. 4.

(4) $$u^{(1)} \quad u_1^{(1)} \quad v_1^{(1)}$$

so wird auch

(5) $$z_1^{(1)} = u^{(1)} + u_1^{(1)} \log v_1^{(1)}$$

ein Integralelement des vorgelegten Systems sein. Wenn nun entweder die t-Gleichung linear ist, oder der Fall eintritt, dass für alle möglichen Umläufe des x, die irgend einen t-Wert in irgend einen andern t-Wert überführen, das neue $u_1^{(1)}$ gleich dem früheren u_1 ist, so ist u_1 eine rationale symmetrische Funktion der Lösungen der t-Gleichung und somit rational durch ihre Coefficienten d. h. weiter rational durch die Coefficienten des Systems (1) ausdrückbar. Dann aber gilt der S. 41 angeführte Satz, nach welchem noch ein anderes Integralelement von der Form

(6) $$z_1 = u + U_1 \log V_1 \text{*)}$$

existiert, worin auch V_1 eine rationale Funktion der Coefficienten des Systems (1) ist. Schliessen wir diesen Fall aus, so muss es eine Beziehung (5) geben, in welcher $u_1^{(1)}$ von u_1 verschieden ist. Aus (2) und (5) folgt, dass $z_1^{(1)} - z_1$ ein Integralelement für das zugehörige reducierte System sein muss. Nehmen wir nun wieder an, dass dem letzteren kein logarithmisches Integral der obigen Form zukommt, so muss $z^{(1)} - z$ gleich einer algebraischen Funktion w sein

(7) $$u^{(1)} - u + u_1^{(1)} \log v_1^{(1)} - u_1 \log v_1 = w.$$

Nach bekannter Schlussweise ergiebt sich dann, indem ein Logarithmand als die Variabele aufgefasst wird, während die andern Grössen als davon abhängige Funktionen gedacht werden, die Relation

$$k_1^{(1)} u_1^{(1)} - k_1 u_1 = 0$$

oder

(8) $$\frac{u_1^{(1)}}{u_1} = \frac{k_1}{k_1^{(1)}}.$$

Wenn aber das Verhältnis zweier Lösungen einer irreduktiblen Gleichung gleich einer rationalen Zahl ist, so muss

*) *Crelle*'sches Journal Bd. 99 S. 36 ff. *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 301.

diese gleich ± 1 sein*). Der Fall $+1$ ist aber von vornherein auszuschliessen, da aus $u_1^{(1)} = u_1$ im Verein mit der für die u_1-Gleichung vorausgesetzten Irreduktibilität folgen würde, dass diese linear, also u_1 rational wäre, was auf den Satz S. 41 führen würde. Es bleibt also nur übrig

$$u_1^{(1)} = - u_1,$$

und man erkennt leicht, dass die Beziehung zwischen allen Lösungen der u-Gleichung bestehen muss für alle x Umläufe, die ein t in einen anderen Lösungswert überführen**). Denn lassen wir wie bei der Herleitung der Gleichung (5) aus (2) x solche Umläufe machen, dass t_1 in irgend ein anderes t_i übergeht, und es entspreche diesem t_i die Zusammenstellung

$$u^{(i)} \quad u_1^{(i)} \quad v_1^{(i)}, \tag{9}$$

so ergiebt sich wieder eine Beziehung von der Form

$$\frac{u_1^{(i)}}{u_1} = \frac{k_1}{k_1^{(i)}},$$

woraus weiter folgt

$$u_1^{(i)} = - u_1,$$

und es wäre

$$u_1^{(i)} = u_1^{(1)}. \tag{10}$$

Wir kommen also wieder auf den früheren Wert $u_1^{(1)}$. Die u_1-Grösse hat also die Eigenschaft, dass sie für alle x Umläufe, die einen t-Wert in sämtliche Lösungen von (3) überführt, nur 2 Werte besitzt, die absolut genommen gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind. Bilden wir das Produkt der beiden u_1-Werte, so ist dieses eine rationale symmetrische Funktion der Lösungen der Gleichung (3) und somit rational durch $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha$ ausdrückbar. Daraus folgt, dass u_1 definiert sein muss durch eine Gleichung von der Form

$$u_1^2 = \omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha), \tag{11}$$

wo ω eine rationale Funktion bedeutet. Wir finden:

Besteht ein Integralelement der Form (2), *so muss unter*

---

*) S. 3 und 16.

**) *Crelle*'sches Journal Bd. 99 S. 44.

den bekannten Bedingungen u_1 *entweder rational oder durch eine Gleichung der Form* (11) *definiert sein.*

Für den letzten Fall ist jetzt noch die Frage zu lösen: Welche Eigenschaft besitzt der Logarithmand v_1? Denken wir uns die algebraischen Funktionen u und v_1 definiert durch algebraische Gleichungen, welche wir uns mit Adjungierung der Grössen x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α und u_1 irreduktibel vorstellen wollen. Ist dann die v_1-Gleichung vom ersten Grade, so wäre v_1 schon eine rationale Funktion der genannten Grössen; ist sie aber von einem höheren Grade, so lassen wir x solche geschlossenen Umläufe machen, dass v_1 in einen anderen Lösungswert seiner Gleichung übergeht, während $Y_{\alpha\beta}$, y_α, u_1 ungeändert bleiben. Dann ist wie früher

$$\zeta_1^{(1)} = u^{(1)} + u_1 \log v_1^{(1)} \tag{12}$$

wieder ein Integralelement, woraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(1)} - z_1 &= u^{(1)} - u + u_1 \log v_1^{(1)} - u_1 \log v_1 \\ &= u^{(1)} - u + u_1 \log \frac{v_1^{(1)}}{v_1} = w \end{aligned} \tag{13}$$

ein Integralelement des reducierten Systems ist, und als solches der gemachten Annahme zufolge gleich einer algebraischen Funktion ω, die auch eine Constante sein kann. Aus der letzten Gleichung folgt, dass $\frac{v_1^{(1)}}{v_1}$ gleich einer Constanten und dann weiter*) gleich einer μ^{ten} Einheitswurzel ist, so dass die Definitionsgleichung für v_1 lautet

$$v_1^{\delta\mu} + \Phi_1 v_1^{(\delta-1)\mu} + \cdots + \Phi_\delta = 0. \tag{14}$$

Setzen wir

$$v_1^\mu = V_1 \quad \text{oder} \quad v_1 = \sqrt[\mu]{V_1}, \tag{15}$$

so nimmt das Integralelement (2) jetzt die Form an

$$z_1 = u + u_1 \log \sqrt[\mu]{V_1} = u + \frac{u_1}{\mu} \log V_1, \tag{16}$$

wo V durch eine Gleichung desselben Charakters aber niederen Grades definiert ist, als es v_1 war.

---

*) S. 3.

Gehen wir von der Gleichung (16) aus, und wenden wir dieselben Schlüsse wie oben an, so ergiebt sich schliesslich, dass sich das Integralelement (2) in die Form setzen lässt

$$(17) \qquad z_1 = u + \frac{u_1}{M} \log W_1,$$

wo W_1 durch eine lineare Gleichung vom Charakter der Gleichung (14) definiert ist. Somit ist W_1 eine rationale Funktion der Coefficienten des Differentialgleichungssystems (1) und der Grösse u_1. Ordnen wir nach u_1, so ergeben sich für den Logarithmanden, da

$$(18) \qquad u_1 = \pm \sqrt{\omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)}$$

ist, die beiden Ausdrücke

$$(19) \quad W_1 = \Omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) + F(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) \sqrt{\omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)}$$

$$(20) \quad W_1' = \Omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) - F(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) \sqrt{\omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)},$$

wo Ω und F rationale Funktionen der in den Klammern stehenden Grössen bedeuten. Die algebraische Funktion W_1 besitzt also nur 2 Werte und muss somit Lösung einer quadratischen Gleichung sein, die wir jetzt aufstellen wollen. Zu dem Zwecke würde es genügen, in (19) und (20) die rechten Seiten links herüber zu bringen und beide Ausdrücke zu multiplicieren. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass $W_1 . W_1'$ — das ist das freie Glied in der gesuchten Gleichung — constant ist. In dem Ausdruck (17), auf welchen sich das angenommene Integral (2) bringen liess, sind, da die u_1-Gleichung die beiden Lösungen u_1 und $-u_1$ besitzt, zwei Integralformen enthalten. Der zweiten Lösung $-u_1$ entspricht als W_1-Wert W_1', und als u-Wert möge u' entsprechen. Dann lauten die beiden Integralformen

$$(21) \qquad z_1 = u + \frac{u_1}{M} \log W_1$$

$$(22) \qquad \bar{z}_1 = u' - \frac{u_1}{M} \log W_1', \text{*)}$$

und da beide Integralelemente des Systems (1) sind, so muss

*) u' ist dasjenige u, welches dem zweiten Wert von u_1, also $-\sqrt{\omega}$ entspricht.

(23) $$\bar{z}_1 - z_1 = u^{(1)} - u - \frac{u_1}{M} \log W_1 W_1' = w$$

ein Integralelement des reducierten Systems sein, also w eine algebraische Funktion oder Constante bedeuten. Aus (23) folgt, dass $W_1 W_1'$ eine Constante ist, die mit c bezeichnet werden mag. Somit lautet also in der aufzustellenden W_1-Gleichung das freie Glied c. Da der Coefficient der ersten Potenz von W_1 die Summe der beiden W_1-Werte ist, so ist dieser nach (19) und (20) $2\Omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)$, und somit lautet die quadratische Gleichung für W_1

(24) $$W^2 - 2\Omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)\, W + c = 0.$$

Wir fügen noch eine Frage an: Es ist oben gezeigt, dass sich v_1 oder W_1 rational durch $(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)$ ausdrücken lässt, wenn es u_1 thut. Kann sich v_1 auch rational durch $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha$ ausdrücken lassen, wenn u_1, wie im vorliegenden Fall, sich nicht rational durch $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha$ ausdrücken lässt?

Aus (19) folgt

$$W - \Omega = F \cdot \sqrt{\omega}$$

oder $$\sqrt{(W - \Omega)^2} = F \cdot \sqrt{\omega}$$

oder $$\sqrt{W^2 - 2W\Omega + \Omega^2} = F \cdot \sqrt{\omega}$$

oder mit Benutzung von (24)

(25) $$\sqrt{\Omega^2 - c} = F \cdot \sqrt{\omega}.$$

Wenn nun W_1 sich rational durch die Coefficienten $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha$ ausdrücken lassen soll, so folgt aus (19) $F = 0$, da, wie (11) zeigt, ω nicht Null sein kann. Die letzte Gleichung sagt dann aus, dass

$$\sqrt{\Omega^2 - c} = 0, \quad \Omega = \sqrt{c}.$$

Hieraus würde aber weiter mit Berücksichtigung der Gleichung (24) folgen, dass W_1 eine Constante wäre.

Schliessen wir diesen Fall aus, so kann W_1 sich also nur dann rational durch $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha$ ausdrücken, wenn u_1 rational in diesen Grössen ist; ist aber u_1 rational in diesen Grössen, so ist es auch W_1.

Wir können dasselbe Resultat auch in folgender Form erkennen. Fassen wir in dem Integralelement

$$z_1 = u + u_1 \log v_1$$

u und u_1 als Lösungen algebraischer Gleichungen auf, welche mit Adjungierung der Coefficienten des Systems (1) irreduktibel sind, und nehmen wir zu den adjungierten Grundgrössen noch v_1 hinzu. Dann lassen sich u und u_1 durch eine andre algebraische Grösse t ausdrücken, welche selbst die Lösung einer mit Adjungierung der genannten Grössen irreduktiblen Gleichung ist. Ist die t-Gleichung linear, so folgt, dass u und u_1 sich rational durch x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, v_1 ausdrücken lassen. Ist die t-Gleichung nicht linear, so folgt, indem wir x einen solchen Umlauf machen lassen, dass t in einen anderen Lösungswert übergeht, während die adjungierten Grössen ungeändert bleiben, dass dann auch

$$z' = u' + u_1' \log v_1$$

ein Integralelement des Systems (1) ist, sodass dem reducierten System

$$z_1' - z_1 = u' - u + (u_1' - u_1) \log v_1 = w$$

als Integralelement zukommt, worin w der gemachten Annahme nach eine algebraische Funktion bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt aber, da wir den Fall, dass v_1 constant ist, ausschliessen können, dass $u_1' = u_1$. Stellen wir diese Thatsache mit der für die u_1-Gleichung vorausgesetzten Irreduktibilität zusammen, so folgt, dass die u_1-Gleichung linear gewesen sein muss, dass also u_1 rational durch x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α und v_1 ausdrückbar ist. Nun sollte v_1 rational in den Coefficienten sein. Wir finden:

Ist u_1 rational in den Coefficienten des Systems (1), *so ist es auch v_1 und umgekehrt: ist v_1 rational in den Coefficienten, so muss es auch u_1 sein.*

Aus der obigen Gleichung folgt noch

$$u' - u = w,$$

woraus sich unter der ferneren Annahme, dass dem reducierten System nur in x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α algebraisch rationale Inte-

grale zukommen sollen, ergiebt, dass auch u sich rational durch x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α darstellen lassen muss.

Die Gleichung (23) lässt sich jetzt schreiben

$$u' - u - \frac{u_1}{M} \log c = w, \tag{26}$$

wo w ein algebraisches Integralelement des reducierten Systems ist. Hat das letztere nur algebraisch rationale Integralelemente, so folgt wegen der für die u-Gleichung vorausgesetzten Irreduktibilität aus

$$u' - u = \text{rat. Fkt.}\,(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha, u_1),$$

dass auch u sich rational durch x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, u_1 ausdrücken lassen muss. Somit besitzt u die beiden Ausdrücke

$$\left\{\begin{aligned} u &= \varphi(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) + \psi(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)\sqrt{\omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)} \\ u' &= \varphi(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) - \psi(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)\sqrt{\omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)} \end{aligned}\right. \tag{27}$$

und genügt der quadratischen Gleichung

$$u^2 - 2\varphi(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha, u_1)\, u + \Phi(z, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha, u_1) = 0, \tag{28}$$

wo φ, ψ, Φ algebraische rationale Funktionen bedeuten.

Wir finden als Resultat:

Hat das lineare, nicht homogene Differentialgleichungssystem (1) *ein Integralelement, das sich — also im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente dieses Integralsystems — aus einem Logarithmus zusammensetzt, also die Form hat*

$$z_1 = u + u_1 \log v_1, \tag{29}$$

worin u, u_1, v_1 *algebraische Funktionen von* x *sind, so lässt sich dasselbe, unter der Voraussetzung, dass dem reducierten Differentialgleichungssystem kein ähnliches Integral zukommt, in die Form setzen*

$$z_1 = U + U_1 \log V_1, \tag{30}$$

worin

entweder U_1 *und* V_1 *rationale Funktionen der Coefficienten des Systems* (1) *sind, und auch* U *denselben Charakter hat, wenn noch angenommen wird, dass das reducierte Differentialgleichungssystem nur in den Coefficienten von* (1) *algebraisch rationale Integrale besitzt,*

oder U_1 und V_1 genügen zwei irreduktiblen quadratischen Gleichungen von der Form

$$(31)\qquad \begin{cases} U_1^2 = \omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha), \\ V_1^2 - 2\Omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) V_1 + c = 0, \end{cases}$$

worin ω und Ω zwei rationale Funktionen sind, c eine Constante und V_1 eine rationale Funktion von x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, u_1 bedeutet, so dass das Integralelement lautet

$$(32)\qquad z_1 = U \pm \sqrt{\omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)} \log \left\{ \Omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) \pm F(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) \sqrt{\omega(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)} \right\},$$

worin F wieder eine rationale Funktion bedeutet. Für den Fall, dass dem reducierten System nur algebraisch rationale Integrale zukommen, genügt auch U einer quadratischen Gleichung und lässt sich darstellen als eine rationale Funktion von x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, u_1.

$\varrho = 2.$

Der Fall, $\varrho = 2$, dass also zwei Logarithmen im Integralelement enthalten sind, ist von Herrn *Prof. Koenigsberger* in seinem neuesten Werke „Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen“ S. 305 ff. bereits für Systeme totaler Differentialgleichungen durchgeführt, und kann somit hier übergangen werden. Wir behandeln zum Schluss noch den Fall $\varrho = 3$.

$\varrho = 3.$

Es sei wieder das System (1) vorgelegt und es setze sich ein Element eines Integralsystems — also im allgemeinen auch die ergänzenden Elemente dieses Integralsystems — aus drei Logarithmen zusammen, es habe also die Form

$$(33)\qquad z_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + u_3 \log v_3,$$

worin die u- und v-Grössen Lösungen algebraischer, mit Adjungierung der Coefficienten des Systems (1) irreduktiblen Gleichungen sind, und worin die drei Logarithmen unter einander nicht in einer linearen Beziehung mit algebraischen Coefficienten stehen. Ebenso ist eine lineare homogene Rela-

tion zwischen den Coefficienten der Logarithmen auszuschliessen, da sonst eine Reduktion der Anzahl der im Integralelement (33) vorkommenden Logarithmen möglich wäre.

Lassen wir x solche geschlossenen Umläufe machen, dass die Coefficienten des Systems (1) in ihre früheren Werte zurückkehren*), so ist, wenn die hierbei eintretenden Veränderungen der übrigen Grössen mit dem Index $'$ bezeichnet werden,

$$(34) \qquad z_1' = u' + u_1' \log v_1' + u_2' \log v_2' + u_3' \log v_3'$$

auch ein Integralelement des Systems (1), und folglich $z_1' - z_1$ ein Integralelement des reducierten Systems, das sich aber infolge der für das letztere gemachten Annahme als eine algebraische Funktion w, die auch eine Constante sein kann, darstellt

$$z_1' - z = u' - u + u_1' \log v_1' - u_1 \log v_1 + u_2' \log v_2' - u_2 \log v_2 + u_3' \log v_3' - u_3 \log v_3 = w,$$

oder wenn gesetzt wird

$$w - u' + u = W,$$

$$(35) \qquad u_1' \log v_1' - u_1 \log v_1 + u_2' \log v_2' - u_2 \log v_2 + u_3' \log v_3' - u_3 \log v_3 = W.$$

Fassen wir in dieser Gleichung $u_1, u_1', v_1, v_1', u_2, u_2', v_2, v_2', u_3, u_3', v_3$ und W als algebraische Funktionen von v_3' auf, die selbst als die Variabele gedacht werden mag, und lassen wir v_3' einen Umlauf um den Nullpunkt machen, so folgt nach Betrachtungen, wie sie früher so oft angestellt wurden, die Relation

$$(36) \qquad k_1' u_1' - k_1 u_1 + k_2' u_2' - k_2 u_2 + k_3' u_3' - k_3 u_3 = 0,$$

worin die k ganze Zahlen bedeuten und sicher k_3' von Null verschieden ist. Hieraus folgt

$$(37) \qquad u_3' = -\frac{k_1'}{k_3'} u_1' + \frac{k_1}{k_3'} u_1 - \frac{k_2'}{k_3'} u_2' + \frac{k_2}{k_3'} u_2 + \frac{k_3}{k_3'} u_3,$$

so dass die Gleichung (35) die Form annimmt

*) Vgl. die Schlussweise mit der Hülfsfunktion t auf Grund des Abel'schen Satzes.

$$u_1' \log \frac{v_1'^{\frac{1}{k_1'}}}{v_3'^{\frac{1}{k_3'}}} - u_1 \log \frac{v_1^{\frac{1}{k_1}}}{v_3'^{\frac{1}{k_3'}}} + u_2' \log \frac{v_2'^{\frac{1}{k_2'}}}{v_3'^{\frac{1}{k_3'}}} - u_2 \log \frac{v_2^{\frac{1}{k_2}}}{v_3'^{\frac{1}{k_3'}}}$$
$$- u_3 \log \frac{v_3^{\frac{1}{k_3}}}{v_3'^{\frac{1}{k_3'}}} = W$$

oder

$$(38)\; u_1' \log \frac{v_1'^{k_3'}}{v_3'^{k_1'}} - u_1 \log \frac{v_1^{k_3'}}{v_3'^{k_1}} + u_2' \log \frac{v_2'^{k_3'}}{v_3'^{k_2'}} - u_2 \log \frac{v_2^{k_3'}}{v_3'^{k_2}}$$
$$- u_3 \log \frac{v_3^{k_3'}}{v_3'^{k_3}} = k_3' W.$$

Aus der Gleichung (38) lässt sich nun der Charakter der Funktionen u_1, u_2, u_3 ermitteln. Dazu muss aber vorher noch zweierlei gezeigt werden: erstens, wir dürfen den letzten Logarithmanden $\frac{v_3^{k_3'}}{v_3'^{k_3}}$ als variabel voraussetzen; zweitens, wenn der letzte Logarithmand variabel ist, so kann der erste und dritte Logarithmand nicht gleichzeitig constant sein.

Angenommen, der letzte Logarithmand wäre eine Constante c

$$(39) \qquad \frac{v_3^{k_3'}}{v_3'^{k_3}} = c.$$

Stehen aber zwei Lösungen einer irreduktiblen Gleichung in einer solchen Beziehung*), so muss entweder

$$(40) \qquad k_3' = k_3 \quad \text{oder} \quad k_3' = -k_3$$

sein, d. h.

$$(41) \qquad v_3' = c_3 v_3 \text{**)} \quad \text{oder} \quad v_3' v_3 = \bar{c}_3$$

und folglich

$$(42) \qquad \begin{cases} \log v_3' = \log c_3 + \log v_3 & \text{oder} \\ \log v_3' = \log \bar{c}_3 - \log v_3 . \end{cases}$$

---

*) *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 308.

**) Diese Art der Beziehung hätten wir auch von vorn herein ausschliessen können, denn hierin müsste c_3 eine μ^{te} Einheitswurzel sein. Wird dann $v_3^{\mu} = V_3$ gesetzt, so lässt sich schon im Integral (33) eine Änderung vornehmen, indem $\frac{\mu_3}{\mu} \log V_3$ an Stelle von $\mu_3 \log v_3$ tritt.

Sehen wir von dieser Beziehung für einen Augenblick ab.

Wenn der letzte Logarithmand in (38) constant ist, so wollen wir in (35) nicht v_3', sondern v_2' als die Variabele und die übrigen Grössen als Funktionen von v_2' betrachten. Dann ergeben sich genau wie oben zwei Gleichungen, welche (36) und (38) entsprechen. In der neuen Gleichung (38) ist dann der Logarithmand $\frac{v_2^{k_2'}}{v_2'^{k_2}}$ entweder variabel oder constant. Im ersten Falle legen wir diese Gleichung der weiteren Betrachtung zu Grunde, im zweiten Falle ergeben sich Beziehungen, der Form (41) und (42) entsprechend,

$$(41') \qquad v_2' = c_2 v_2 \quad \text{oder} \quad v_2' v_2 = \bar{c}_2$$

d. h.

$$(42') \qquad \begin{cases} \log v_2' = \log c_2 + \log v_2 \quad \text{oder} \\ \log v_2' = \log \bar{c}_2 - \log v_2 . \end{cases}$$

Dann können wir weiter in (35) v_1' als die Variabele betrachten, von der die übrigen Grössen als Funktionen abhängen, und wieder wie oben zwei Gleichungen herleiten, die den Gleichungen (36) und (38) entsprechen. Ist in der neuen Gleichung (38) der Logarithmand $\frac{v_1^{k_1'}}{v_1'^{k_1}}$ variabel, so legen wir diese Gleichung zu Grunde, ist er dagegen constant, so folgen Beziehungen von der Form (41) und (42)

$$(41'') \qquad v_1' = c_1 v_1 \quad \text{oder} \quad v_1' v_1 = \bar{c}_1 ,$$

folglich

$$(42'') \qquad \begin{cases} \log v_1' = \log c_1 + \log v_1 \quad \text{oder} \\ \log v_1' = \log \bar{c}_1 - \log v_1 . \end{cases}$$

Wären nun sämtliche in Frage stehenden Logarithmanden constant, so lautet der Ausdruck für $z_1' - z_1$, der ja ein Integralelement des reducierten Systems sein muss, und der ferner infolge der für das reducierte System gemachten Annahme sich als eine algebraische Funktion ω oder als eine Constante darstellen lassen muss,

$$(43)\quad z_1' - z_1 = u_1' - u_1 + u_1' \log\left|\frac{c_1}{C_1}\right| \pm u_1' \log v_1 - u_1 \log v_1$$
$$+ u_2' \log\left|\frac{c_2}{C_2}\right| \pm u_2' \log v_2 - u_2 \log v_2$$
$$+ u_3' \log\left|\frac{c_3}{C_3}\right| \pm u_3' \log v_3 - u_3 \log v_3 = w,$$

woraus durch Zusammenfassung der algebraischen Teile folgt

$$(44)\quad (u_1 \pm u_1') \log v_1 + (u_2 \pm u_2') \log v_2 + (u_3 \pm u_3') \log v_3 = W$$

Eine solche lineare Relation mit algebraischen Koefficienten darf aber zwischen den drei Logarithmen nach unserer Annahme S. 50 nicht bestehen. Somit folgt

$$(45)\qquad u_1' = \pm u_1; \quad u_2' = \pm u_2; \quad u_3' = \pm u_3.$$

In diesen Gleichungen ist die erste Möglichkeit (mit den positiven Zeichen) von vorn herein auszuschliessen, und auch die zweite Möglichkeit (negative Zeichen) können wir ausschliessen, wenn wir annehmen, dass jener Windungspunkt von u_1 resp. u_2 und u_3, bei dessen Umkreisung eben die genannten Grössen in u_1', u_2', u_3' übergingen, nicht ein einfacher ist, in welchem zwei entgegengesetzte Werte der Funktion sich vereinigen. Die durch diese Annahme hervorgerufene Lücke soll sogleich besonders behandelt werden. Wir finden: *In der Gleichung* (38) *darf der letzte Logarithmand variabel vorausgesetzt werden für solche geschlossenen Umläufe des x um einen Verzweigungspunkt von u_1 resp. u_2 und u_3, bei welchen die Coefficienten des Differentialgleichungssystems* (1) *intakt bleiben.*

Füllen wir jetzt die obige Lücke aus. Die Gleichungen (44) und (45) enthalten keinen Widerspruch in sich, wenn die Definitionsgleichungen von u_1, u_2, u_3 vom ersten Grade sind. Dann aber sind die genannten Funktionen rationale Funktionen der Coefficienten des Systems (1), und wir werden auf den Satz S. 41 geführt. Es besteht aber auch dann kein Widerspruch, wenn die Definitionsgleichung für u_1, u_2, u_3 nur einfache Verzweigungspunkte mit absolut genommenen gleichen, dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Werten besitzt. Dann aber folgt (wie auf S. 44), dass u_1^2, u_2^2, u_3^2

eindeutige Funktionen sind, die sich rational durch die Coefficienten des Systems (1) ausdrücken lassen

$$(46)\qquad \begin{cases} u_1^2 = \omega_1(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) \\ u_2^2 = \omega_2(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha) \\ u_3^2 = \omega_3(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha). \end{cases}$$

Bleiben wir noch einen Augenblick bei der Gleichung (38) stehen, um nach einer anderen Seite hin einige Bemerkungen anzuschliessen. Nehmen wir an, der letzte Logarithmand $\frac{v_3^{k_3'}}{v_3'^{k_3}}$ sei constant und gleich c. Dann können wir, wie oben erwähnt, zwei andre, der Gleichung (38) entsprechende Gleichungen dadurch herleiten, dass wir v_2' resp. v_1' als die Variabele betrachten. Seien dann auch die Logarithmanden $\frac{v_2^{k_2'}}{v_2'^{k_2}}$ und $\frac{v_1^{k_1'}}{v_1'^{k_1}}$ constant, so dass wir zu folgenden Beziehungen geführt werden

$$(47)\ \begin{cases} v_3' = c_3 v_3 & \text{oder} \\ v_2' = c_2 v_2 & \text{oder} \\ v_1' = c_1 v_1 & \text{oder} \end{cases} \qquad (48)\ \begin{cases} v_3' v_3 = \bar{c}_3 \\ v_2' v_2 = \bar{c}_2 \\ v_1' v_1 = \bar{c}_1. \end{cases}$$

Das Constantsein der oben genannten Logarithmanden kann bei dem einen auf die eine Art (47) der Beziehungen, bei den andern auf die andre Art (48) der Beziehungen zurückgehen. In den Beziehungen (47) müssen, wie Herr *Prof. Koenigsberger* bewiesen, c_1, c_2, c_3 Constanten und zwar μ_1^{te} resp. μ_2^{te} und μ_3^{te} Einheitswurzeln sein, und v_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ durch eine Gleichung definiert sein, wie sie in der Einleitung S. 3 näher gekennzeichnet ist. Die zweite Art der Beziehungen setzt als Definitionsgleichung für v_α eine Gleichung vom Charakter der reciproken Gleichungen voraus. Bleiben wir bei der ersten Art (47) der Beziehungen. Wird in der Definitionsgleichung für v_α

$$v_\alpha^{\mu_\alpha} = V_\alpha \quad \text{oder} \quad v_\alpha = \sqrt[\mu_\alpha]{V_\alpha}$$

gesetzt, so tritt in dem Integral (33) an die Stelle von

$u_\alpha \log v_\alpha$ der Ausdruck $\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha} \log V_\alpha$, wo V_α durch eine Gleichung desselben Charakters aber niedrigen Grades definiert ist, als es v_α war. Von dem Integralelement in dieser Form ausgehend, können wir dann die Gleichung (38) bilden. Zeigt sich in der neuen Gleichung (38) der Logarithmand $\frac{V_\alpha^{k'_\alpha}}{V'^{k_\alpha}_\alpha}$ constant und zwar auf Grund einer Beziehung von der Art (47), so können wir wie oben weiter schliessen. Dabei gelangen wir endlich zu einem Logarithmanden $\overline{V}_\alpha$, der Lösung einer Gleichung ersten Grades, also eine rationale Funktion von x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α ist.

Denken wir uns die drei Gleichungen (38), und seien die drei Logarithmen $\log \frac{v_\alpha^{k'_\alpha}}{v'^{k'_\alpha}_\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ constant infolge einer Beziehung der Art (47) [vgl. den Fall, dass die Grössen v_α durch binomische Gleichungen z. B. definiert sind], dann könnten wir schon von vorn herein im Integralelement eine Änderung vornehmen. Bilden wir immer wieder eine Gleichung (38) und sei in derselben stets $\log \frac{v_\alpha^{k'_\alpha}}{v'^{k'_\alpha}_\alpha}$, auf Grund der Beziehung (47) constant, so ergiebt sich, dass sich das ursprüngliche Integralelement in die Form setzen lässt

$$u + \frac{u_1}{v_1} \log V_1 + \frac{u_2}{v_2} \log V_2 + \frac{u_3}{v_3} \log V_3,$$

worin die Logarithmanden rationale Funktionen von x und den Coefficienten des Systems (1) sind.

Wir fragen: welchen Charakter haben die u_1-, u_2-, u_3-Grössen, wenn die Logarithmanden rational sind?

Behufs Lösung dieser Frage fassen wir u, u_1, u_2, u_3 als Lösungen von vier algebraischen Gleichungen in x auf, welche mit Adjungierung von x, $Y_{\alpha\beta}$ und y_α, wozu wir noch die Grössen v_1, v_2, v_3 hinzunehmen, irreduktibel sein mögen. Dann lässt sich nach dem *Abel*'schen Satze eine t-Grösse bilden, durch welche sich u, u_1, u_2, u_3 rational ausdrücken lassen, und welche selbst die Lösung einer algebraischen Gleichung ist,

die wir gleichfalls mit Adjungierung von x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, v_1, v_2, v_3 irreduktibel annehmen dürfen. Ist die t-Gleichung vom ersten Grade, so folgt ohne weiteres, dass u, u_1, u_2, u_3 rational in x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, v_1, v_2, v_3, also auch rational in x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α sind. Ist die t-Gleichung von einem höheren Grade, so lassen wir x einen solchen geschlossenen Umlauf machen, der t in einen anderen Lösungswert überführt, während die adjungierten Grössen sich nicht ändern. Der neuen t-Lösung mögen die Werte $\bar{u}$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ entsprechen, dann ist auch

$$\bar{z}_1 = \bar{u} + \bar{u}_1 \log v_1 + \bar{u}_2 \log v_2 + \bar{u}_3 \log v_3$$

ein Integralelement für (1) und folglich $\bar{z}_1 - z_1$ ein Integralelement des reducierten Systems

$$\bar{z}_1 - z_1 = \bar{u} - u + (\bar{u}_1 - u_1) \log v_1 + (\bar{u}_2 - u_2) \log v_2 \\ + (\bar{u}_3 - u_3) \log v_3 = w.$$

Hat das reducierte System kein logarithmisches Integralelement dieser Form, so muss w eine algebraische Funktion (ev. Constante) sein, und folglich

$$\bar{u}_1 = u_1, \quad \bar{u}_2 = u_2, \quad \bar{u}_3 = u_3,$$

woraus wegen der für die Definitionsgleichungen der u-Grössen vorausgesetzten Irreduktibilität folgt, dass die u-Grössen Lösungen von Gleichungen ersten Grades sind, also sich rational durch die Coefficienten x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, v_1, v_2, v_3 ausdrücken lassen. Nun waren v_1, v_2, v_3 selbst rational in x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, folglich sind auch die Coefficienten der Logarithmen rationale Funktionen der Coefficienten des Differentialgleichungssystems (1). Denselben rationalen Charakter hat auch im Integralelement (33) das algebraische Glied u, wenn noch angenommen wird, dass das reducierte System nur in den Coefficienten x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α algebraisch rationale Integralelemente besitzt. Dies erkennt man sofort, da eine irreduktible algebraische Gleichung, von der zwei Lösungen u und $\bar{u}$ in der Beziehung stehen, dass

$$\bar{u} = u + w$$

ist, wo w eine rationale Grösse bedeutet, offenbar vom ersten Grade sein muss.

Wir kehren zur Gleichung (38) zurück, um nun auch noch das Zweite (vgl. S. 70) zu zeigen: nämlich, dass der erste und dritte Logarithmand nicht gleichzeitig constant sein können, wenn, wie wir jetzt annehmen dürfen, der letzte Logarithmand variabel ist. Das ist aber unmittelbar zu sehen. Denn wären sie constant, so würde sich nach bekannter Schlussweise eine Relation von der Form

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 = 0 \tag{49}$$

ergeben, die aber auszuschliessen ist, da sie eine Reduktion der Anzahl der im Integralelement enthaltenen Logarithmen nach sich ziehen würde.

Nunmehr wird es leicht sein, aus der Gleichung (38) die Eigenschaft der u-Funktionen zu ermitteln. Zu diesem Zwecke betrachten wir die einzelnen Logarithmanden als algebraische Funktionen des letzten Logarithmanden, der selbst als die Variabele aufgefasst werden soll. Dann ergeben sich, wenn wir die Variabele zweimal den Nullpunkt umkreisen lassen, die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} l_1' u_1' - l_1 u_1 + l_2' u_2' - l_2 u_2 - l_3 u_3 = 0, \\ m_1' u_1' - m_1 u_1 + m_2' u_2' - m_2 u_2 - m_3 u_3 = 0, \end{cases} \tag{50}$$

worin sicher l_3 und m_3 ganze von Null verschiedene Zahlen bedeuten, ebenso ist mindestens ein Paar der Werte $\binom{l_1'}{m_1'}$ oder $\binom{l_2'}{m_2'}$ von Null verschieden*). Stellen wir mit diesen beiden Gleichungen die Gleichung (36) zusammen

$$k_1' u_1' - k_1 u_1 + k_2' u_2' - k_2 u_2 + k_3' u_3' - k_3 u_3 = 0,$$

so lassen sich hieraus u_1', u_2', u_3' durch u_1, u_2, u_3 ausrechnen

$$\begin{cases} u_1' = p_1' u_1 + p_2' u_2 + p_3' u_3 \\ u_2' = q_1' u_1 + q_2' u_2 + q_3' u_3 \\ u_3' = r_1' u_1 + r_2' u_2 + r_3' u_3, \end{cases} \tag{51}$$

worin $p'..$, $q'..$, $r'..$ rationale Zahlen bedeuten.

---

*) Vgl. *Koenigsberger*, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 310.

Kehren wir nun zu dem Integralelement (33) zurück, und lassen wir x noch einmal einen Umlauf machen, so ist auch

$$(52) \qquad z_1'' = u'' + u_1'' \log v_1'' + u_2'' \log v_2'' + u_3'' \log v_3''$$

ein Integralelement des Systems (1). Wenn wir dann mit diesem Element genau so verfahren, wie mit z_1', so ergiebt sich ein den Gleichungen (51) entsprechendes System

$$(53) \qquad \begin{cases} u_1'' = p_1'' u_1 + p_2'' u_2 + p_3'' u_3 \\ u_2'' = q_1'' u_1 + q_2'' u_2 + q_3'' u_3 \\ u_3'' = r_1'' u_1 + r_2'' u_2 + r_3'' u_3 . \end{cases}$$

Lassen wir jetzt x noch einmal einen Umlauf machen, so ergiebt sich das Integralelement

$$(54) \quad z_1''' = u''' + u_1''' \log v_1''' + u_2''' \log v_2''' + u_3''' \log v_3''',$$

das auf gleiche Weise wie oben zu den Gleichungen führt

$$(55) \qquad \begin{cases} u_1''' = p_1''' u_1 + p_2''' u_2 + p_3''' u_3 \\ u_2''' = q_1''' u_1 + q_2''' u_2 + q_3''' u_3 \\ u_3''' = r_1''' u_1 + r_2''' u_2 + r_3''' u_3 . \end{cases}$$

Stellen wir jetzt in den Systemen (51), (53), (55) die ersten, resp. zweiten, resp. dritten Gleichungen zusammen, so folgt, indem wir jeweils zwei Grössen zwischen drei Gleichungen eliminieren,

$$(56) \qquad \begin{cases} u_1''' = s_1 u_1 + s_1' u_1' + s_1'' u_1'' \\ u_2''' = s_2 u_2 + s_2' u_2' + s_2'' u_2'' \\ u_3''' = s_3 u_3 + s_3' u_3' + s_3'' u_3'' , \end{cases}$$

worin die s-Grössen rationale Zahlen bedeuten, oder

$$(57) \qquad c_\alpha u_\alpha + c_\alpha' u_\alpha' + c_\alpha'' u_\alpha'' + c_\alpha''' u_\alpha''' = 0$$

($\alpha = 1, 2, 3$), worin die c-Grössen rationale ganze Zahlen bedeuten. Wir finden:

Wenn u_α durch eine algebraische Gleichung, welche mit Adjungierung der Coefficienten des Systems irreduktibel ist, definiert wird, so besteht für jeden Verzweigungspunkt, der mehr als ein einfacher ist, zwischen je vier auf einander folgenden

Elementen eines Cyclus eine lineare homogene Relation mit ganzzahligen Coefficienten.

Nachdem die Eigenschaften der Funktionen u_1, u_2, u_3 ermittelt sind, bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Eigenschaften der Logarithmanden v_1, v_2, v_3 zu untersuchen.

Fassen wir in dem Integralelement (33)

$$z_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + u_3 \log v_3$$

die Grössen u, v_1, v_2, v_3 als algebraische Funktionen auf, definiert durch algebraische Gleichungen, welche mit Adjungierung der Grössen x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, u_1, u_2, u_3 irreduktibel sein mögen. Dann können wir nach dem *Abel*'schen Satze u, v_1, v_2, v_3 mit Hülfe rationaler Funktionen der soeben genannten Grössen rational durch eine andre algebraische Funktion t ausdrücken, deren irreduktible Definitionsgleichung ebenfalls rational aus x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, u_1, u_2, u_3 zusammengesetzte Coefficienten besitzt. Lassen wir dann x einen solchen geschlossenen Umlauf machen, dass t in einen anderen Lösungswert übergeht*), welchem die Zusammenstellung

$$u', \; v_1', \; v_2', \; v_3'$$

entsprechen mag, so ist auch

$$z_1' = u' + u_1 \log v_1' + u_2 \log v_2' + u_3 \log v_3' \tag{58}$$

ein Integralelement des Systems (1), woraus folgt, dass, wenn das reducierte System der Annahme gemäss wieder kein logarithmisches Integral der obigen Form besitzt,

$$z_1' - z_1 = u' - u + u_1 \log \frac{v_1'}{v_1} + u_2 \log \frac{v_2'}{v_2} + u_3 \log \frac{v_3'}{v_3} = w \tag{59}$$

ist, wo w eine algebraische Funktion bedeutet. Hieraus ergiebt sich aber weiter, dass entweder sämtliche Logarithmen constant sein müssen, oder eine Relation der Form

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 = 0 \tag{60}$$

bestehen muss. Eine solche Beziehung ist aber sofort auszuschliessen, da sie eine Reduktion der Anzahl der Loga-

*) Ist die t-Gleichung linear, so ist t rational durch x, $Y_{\alpha\beta}$, y_α, u_1, u_2, u_3 ausdrückbar, und dann sind auch weiter schon u_1, v_1, v_2, v_3 rational in diesen Grössen.



rithmen des Integralelementes nach sich ziehen würde. Wenn aber die Logarithmen constant sind, also

(61) $$\frac{v_1'}{v_1} = c_1\,; \quad \frac{v_2'}{v_2} = c_2\,; \quad \frac{v_3'}{v_3} = c_3\,,$$

so müssen, wie früher gezeigt, die Constanten μ^{te} Einheitswurzeln sein, und die Definitionsgleichung für v_α muss die Form haben $(\alpha = 1, 2, 3)$

(62) $$v_\alpha^{\delta_\alpha \mu_\alpha} + \varphi_1(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha, u_1, u_2, u_3)\, v_\alpha^{(\delta_\alpha - 1)\mu_\alpha} + \cdots + \varphi_{\delta_\alpha}(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha, u_1, u_2, u_3) = 0\,.$$

Setzen wir

(63) $$v_\alpha^{\mu_\alpha} = V_\alpha \quad \text{oder} \quad v_\alpha = \sqrt[\mu_\alpha]{V_\alpha}\,,$$

so ist V_α die Lösung einer Gleichung desselben Charakters aber niederen Grades, als es die Gleichung für v_α war. Das Integralelement (33) nimmt jetzt die Form an

(64) $$z_1 = u + \frac{u_1}{\mu_1} \log V_1 + \frac{u_2}{\mu_2} \log V_2 + \frac{u_3}{\mu_3} \log V_3\,.$$

Legen wir jetzt das Integralelement in dieser Form zu Grunde, so finden wir nach derselben Schlussweise, dass sich (64) weiter in die Form setzen lässt

(65) $$z_1 = u + \frac{u_1}{M_1} \log W_1 + \frac{u_2}{M_2} \log W_2 + \frac{u_3}{M_3} \log W_3\,,$$

wo M_1, M_2, M_3 ganze Zahlen bedeuten und W_1, W_2, W_3 die Lösungen dreier linearen Gleichungen sind, also rational durch die Coefficienten, d. h. durch $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha, u_1, u_2, u_3$ ausdrückbar sind.

Lassen wir in (65) x wieder einen geschlossenen Umlauf machen, der t in einen andern Lösungswert, etwa in t' überführt, so ist

(66) $$z' - z = u' - u = w$$

ein Integralelement des reducierten Systems. Wird nun angenommen, dass das reducierte System nur in den genannten Grössen algebraisch rationale Integrale besitzt, so folgt aus der letzten Gleichung mit Rücksicht auf die für die u-Gleichung vorausgesetzte Irreduktibilität, dass dann auch u sich rational durch $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha, u_1, u_2, u_3$ ausdrücken lassen muss.

Die gefundenen Resultate lassen sich in den folgenden Satz zusammenfassen:

Wenn für das lineare, nicht homogene Differentialgleichungssystem (1) *ein Element eines Integralsystems sich linear aus drei algebraisch nicht von einander abhängigen Logarithmen zusammensetzt, also die Form hat*

$$z_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + u_3 \log v_3,$$

worin $u, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ *algebraische Funktionen bedeuten, definiert durch algebraische, mit Adjungierung der Coefficienten des Systems* (1) *irreduktible Gleichungen, so lässt sich dasselbe, wenn das zugehörige reducierte Differentialgleichungssystem kein ähnlich zusammengesetztes Integral besitzt, stets in die Form setzen:*

$$z_1 = U + U_1 \log V_1 + U_2 \log V_2 + U_3 \log V_3,$$

worin 1) *entweder* U_1, U_2, U_3 *sämtlich und dann auch* V_1, V_2, V_3 *rationale Funktionen der Coefficienten des Systems* (1) *sind, und auch* U *denselben Charakter hat, wenn noch angenommen wird, dass das reducierte System nur in den Coefficienten* $x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha$ *algebraisch rationale Integrale besitzt,*

oder 2) *einige der Grössen* U_1, U_2, U_3 *in den Coefficienten von* (1) *rational sind, oder durch irreduktible Gleichungen von der Form*

$$U_\alpha^2 = \omega_\alpha(x, Y_{\alpha\beta}, y_\alpha)$$

definiert sind, wobei ω_α *eine rationale Funktion bedeutet,*

oder 3) U_1, U_2, U_3 *solchen mit Adjungierung der Coefficienten des Systems* (1) *irreduktiblen Gleichungen genügen, dass für jeden mehr als einfachen Verzweigungspunkt zwischen je vier auf einander folgenden Elementen eines Cyclus eine lineare homogene Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht. In jedem Falle lassen sich die Logarithmanden* V_1, V_2, V_3 *rational durch die Coefficienten und* U_1, U_2, U_3 *ausdrücken.*

Der Satz lässt sich auf beliebig viele im Integralelement vorkommende Logarithmen ausdehnen.



Lebenslauf.

Ich, Christian **Max** Ernst **Müller**, evangelischer Confession, bin am 18. August 1862 zu Stargard in Mecklenburg-Strelitz geboren. Mein im Jahre 1879 verstorbener Vater hiess Friedrich Müller; meine Mutter, mit Vornamen Luise, stammt aus der Familie Wasmund.

In der Stadtschule meines Geburtsortes und durch Privatunterricht vorbereitet, trat ich Ostern 1876 in die Realschule zu Neustrelitz ein, welche ich drei Jahre darauf mit dem Realgymnasium zu Prenzlau vertauschte. Nachdem ich Michaelis 1883 die Maturitätsprüfung bestanden, bezog ich im Winter die Universität Greifswald, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Im Sommer-Semester des folgenden Jahres ging ich nach Heidelberg, wo ich bis Ostern 1889 immatriculiert war.

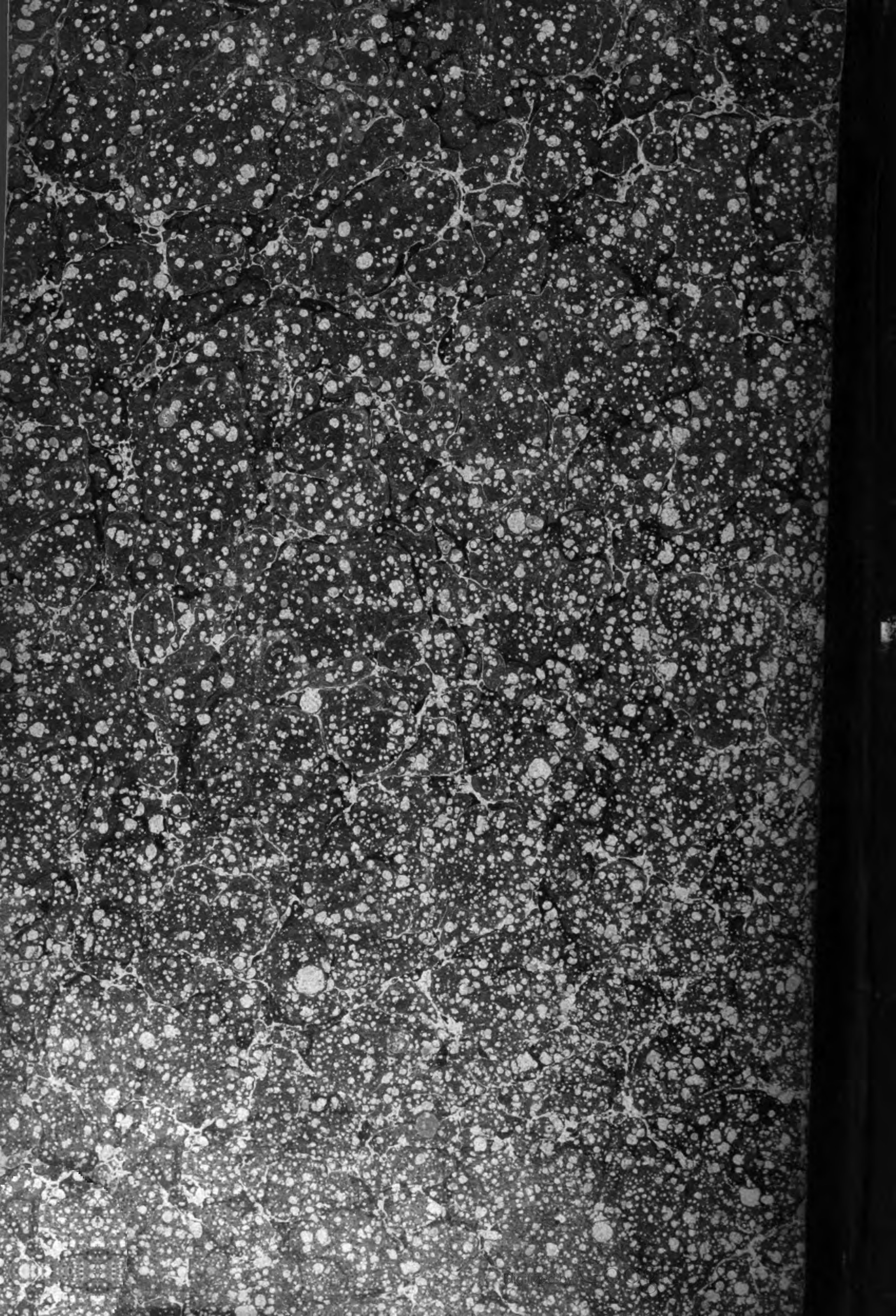
Im Frühjahr 1888 unterzog ich mich in Karlsruhe der Staatsprüfung und trat bald nach Ostern in das Heidelberger Gymnasium als Volontär ein. Nachdem ich eine kurze Zeit nebenbei eine Hauslehrerstelle bekleidet hatte, wurde ich im November 1888 an das Realgymnasium zu Mannheim versetzt, wo ich noch jetzt beschäftigt bin.

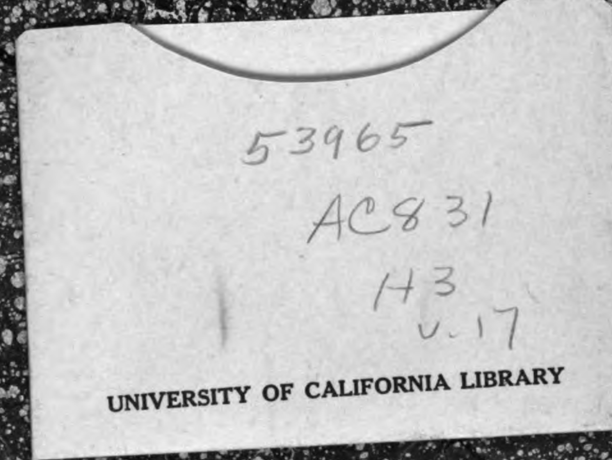
Während meiner Studienzeit besuchte ich Vorlesungen und praktische Übungen bei folgenden Herren Professoren und Docenten:

Credner, von Feilitzsch, Gerstaecker, Holtz, Minnigerode, Schuppe;

Bunsen, Bütschli, Cantor, Fischer, Koehler, Koenigsberger, Pfitzer, Quincke, Rosenbusch, Schapira, Uhlig.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus, insbesondere Herrn *Geh. Rat Prof. Dr. L. Koenigsberger*, von dem ich nicht nur die Anregung zu der vorliegenden Abhandlung erhielt, sondern der mich auch während der Arbeit mit seinem Rat unterstützte.




53965
AC831
H3
v.17
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

